APROBAR MATEMÁTICAS ES FÁCIL,

SI SABES CÓMO.

EJERCICIOS SELECTOS.

DANIEL DE LA BARRERA MAYORAL.

Agradecimientos.

Este proyecto nació en la mente de dos profesores de Secundaria y Bachillerato, Daniel y Rosalía, que veíamos necesaria la obtención de unos materiales útiles para que los alumnos siguieran nuestras clases de manera adecuada. Durante más de un año estuvimos trabajando en sintonía en los distintos libros que componen esta colección. Sin embargo, Rosalía se embarcó en un proyecto mucho más importante y la falta de tiempo dificultó la continuidad en este proyecto científico. Desafortunadamente, una sucesión de problemas administrativos produjeron que Rosalía abandonase la idea de concluir este proyecto de manera directa sin que sus aportaciones apareciesen en ninguno de los títulos de la colección. Confío que estas líneas sirvan como profundo agradeciemiento por su ayuda pasada, presente y futura.

Por otro lado, quiero agradecer su ayuda totalmente desinteresada a mis amigos matemáticos, que han leído con cariño todas las capturas de pantalla que les enviaba por Whatsapp o correo electrónico. Gracias Laura, Santi y Eugenia.

También, quiero agradecer a mi familia el apoyo mostrado durante la escritura de estos libros, ya que han notado el tiempo que he dedicado a la escritura de estos libros.

Además, quiero agradecer su ayuda a los primeros alumnos a los que presentamos fragmentos de nuestro primer libro (ejercicios de Matemáticas aplicadas a Ciencias Sociales) a pesar de que algunos de estos alumnos no estaban en esa modalidad de Bachillerato. Muchas gracias Víctor, Evelina, Pilar, Nuria, Martha, Jennifer, Claudia, Rebeca y Gabriela. Alguno de los materiales de dicho libro fueron entregados incluso a alumnos del curso inferior y también nos indicaron posibles mejoras. Gracias Sandra, Marina, Lorena y Alba.

También quiero agradecer a Alfonso su ayuda para conseguir que el diseño de la portada quedara bonito y no "cómo si fuera un trabajo hecho a última hora".

Además quiero agradecer a mis compañeros Vicente, Graciela y Lola sus aportaciones (lingüísticas y de formato) en la fase de concepción del libro.

Por último, quiero agradecerte a ti, lector y estudiante, el que hayas confiado en nuestro proyecto para conseguir aprobar esta asignatura, que quizás consideres maldita, e incluso, que confío llegues a aprender y disfrutar esta bella rama del conocimiento llamada Matemática.

Si este libro te ha resultado útil, pon un comentario de cuatro o cinco estrellas en la página de compra de Amazon, consulta periódicamente la página web en busca de los nuevos libros y, además, mejor que todo esto, recomiéndaselo a un amigo que lo necesite.

Muchas gracias.

Índice general

Introducción.

El aprendizaje de matemáticas es, en muchas ocasiones, un suplicio para los alumnos. Tras varios años de práctica docente he observado que les ayuda mucho tener materiales escritos y explicados paso a paso para que la diversidad (en cuanto a los ritmos de aprendizaje) sea correctamente atendida. De hecho, durante la fase inicial de escritura pedí opinión a varios de mis alumnos (a los que agradecezco profundamente su ayuda desinteresada). Además, también como docente, considero que a mí mismo me viene bien tener un listado de ejercicios tipo ya resueltos para explicar los distintos contenidos en clase. Por ello, me decidí a escribir esta colección de libros. En cada nivel existen tres opciones (para ver qué publicación te interesa más te recomiendo que visites la web http://aprobarmatematicasesfacil.es/ y visites la página correspondiente al curso que te interese):

- Por un lado, tenemos un libro de exámenes. Aquí encontramos una propuesta de evaluación de cada dos unidades didácticas, con las correspondientes recuperaciones y la convocatoria ordinaria y extraordinaria.

Además para potenciar la evaluación continua, dos puntos de cada examen serán de temas anteriores.

- Por otro lado, el libro de ejercicios. En este tomo encontramos ejercicios tipo, resueltos paso a paso, de cada unidad didáctica. Para este tomo es recomendable tener los conocimientos sobre los conceptos teóricos. Por otro lado, es adecuado para realizar prácticas de manera autónoma.

- En tercer lugar, podemos encontrar el libro en el que juntamos los ejercicios y exámenes de cada curso. Es decir, recopilamos todos los ejercicios del libro de ejercicios y del libro de exámenes. Estos ejercicios llevan la misma numeración que en los libros de exámenes y ejercicios, para evitar confusiones.

Además añadimos ejercicios de exámenes que no fueron empleados para el libro de exámenes, ya que la idea es que cada examen se pueda realizar en 50 minutos (o 90 si es de segundo de Bachillerato).

Dado que los libros de esta opción pueden resultar largos, dichos libros se dividen en tres tomos por bloques temáticos (números, álgebra, análisis, geometría, probabilidad y estadística), estos tomos también tienen los ejercicios extra.

Para poder distinguirlos, en las siguientes páginas los enlaces están separados como exámenes (primera opción), ejercicios (segunda opción) o exámenes + ejercicios (tercera opción). En la tercera opción, para distinguir el libro completo, aparece el término completo. Para los libros temáticos, aparece qué bloque(s) hay en cada libro.

En cada publicación tenemos un índice que nos remite a las unidades trabajadas. Además, en cada libro, al final del mismo, encontramos un índice temático y un listado de ejercicios para facilitar la búsqueda selectiva de ejercicios.

Añadimos un capítulo cero con los enunciados de los ejercicios de cada capítulo, para poder resolverlos sin tener los enunciados al lado o para poder tener una tanda de ejercicios para que los alumnos realicen y poder evaluarlos.

En algunas ocasiones los ejercicios están extraídos de pruebas de acceso a la universidad, sobre todo en los libros de segundo curso de Bachillerato. En estos casos, se indica con la palabra Selectividad, la Comunidad Autónoma y la convocatoria. La solución de cada ejercicio es propia y no ha sido tomada de ninguna fuente externa. Las imágenes se han realizado empleando Geogebra y/o Excel.

En la web http://aprobarmatematicasesfacil.es/ encontrarás en tiempo real qué libros están publicados. También se incluyen materiales de muestra gratuitos de cada libro y los enlaces a las páginas de Amazon para la adquisición.

Desde principios de 2020 comencé a realizar vídeos que he empezado a subir a Youtube en el canal: https://www.youtube.com/LasMatesDeDani. Si te gustan, puedes suscribirte con tu cuenta de Gmail, simplemente pinchas en suscribirse y te saldrá el login para poner tu cuenta de Gmail. Estos vídeos estarán subidos también a mi Web en los distintos apartados de cada curso.

Libros actuales.

En esta página puedes encontrar las direcciones de las páginas de Amazon en las que puedes adquirir los libros.

- ## 2º Bachillerato Ciencias:
  - Libro de exámenes: `https://www.amazon.es/dp/1092506004`
  - Libros de exámenes y ejercicios:
    - Álgebra: `https://www.amazon.es/dp/1092505865`
    - Probabilidad y estadística: `https://www.amazon.es/dp/1092506098`
    - Geometría: `https://www.amazon.es/dp/1092505504`
- ## 2º ESO Bachillerato Ciencias Sociales:
  - Libro de exámenes: `https://www.amazon.es/dp/B09CRN18BD`
- ## 1º Bachillerato Ciencias Sociales:
  - Libro de ejercicios: `https://www.amazon.es/dp/1728628164`
  - Libro de exámenes: `https://www.amazon.es/dp/1724156780`
  - Libros de exámenes y ejercicios:
    - Completo: `https://www.amazon.es/dp/B0874JF7W9`

    - Números y álgebra: `https://www.amazon.es/dp/B08731D9JW`
    - Análisis: `https://www.amazon.es/dp/B0873679YV`
    - Probabilidad y estadística: `https://www.amazon.es/dp/B087496TQQ`

- 4º ESO Matemáticas B:
    - Libro de exámenes: `https://www.amazon.es/dp/B0C9SFNTCR`
- 3º ESO:
    - Libro de exámenes: `https://www.amazon.es/dp/B0C9S9CGDW`
- 2º ESO:
    - Libro de exámenes: `https://www.amazon.es/dp/1793308578`

Capítulo 0

Enunciados ejercicios.

En este capítulo encontramos los enunciados de los ejercicios de cada tema agrupados para poder entregar a los alumnos o para poder practicar sin tener las soluciones al lado de los enunciados

Unidad 1: Matemáticas II.

Ejercicio 1.1:

Considera el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\left\{\begin{array}{c} x+2y+(m+3)z=3 \\ x+y+z=3m \\ 2x+4y+3(m+1)z=8 \end{array}\right\}.$$

a) Discútelo según los valores del parámetro m.

b) Resuelve el sistema para $m=-2$.

(Selectividad Andalucía Junio 2018.)

Ejercicio 1.2:

Calcula la matriz X tal que $A \cdot X \cdot A = B$ siendo:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 \\ 2 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

(Selectividad Baleares Septiembre 2016.)

Ejercicio 1.3:

En una ciudad el 10 % de la población es miope. Se eligen 500 personas al azar. ¿Cuál es la probabilidad de que al menos 55 de ellas sea miope?

Ejercicio 1.4:

Halla la perpendicular común a las siguientes rectas:

$r \equiv (x, y, z) = (1 + \lambda, 2 - \lambda, 3 - 5\lambda)$ y la recta s que es la recta común a los planos $\sigma \equiv x + 3y - z = 3$ y $\sigma' \equiv x - y + z = 2$.

Ejercicio de examen 1.1:

(2 puntos) Estudia la continuidad de la función:

$$f(x) = \begin{cases} 4x + 2 & \text{si } x \leq -1 \\ -x & \text{si } -1 < x < 1 \\ \dfrac{x-3}{x^2 - 5x + 6} & \text{si } x \geq 1 \end{cases} .$$

Clasifica las discontinuidades.

Ejercicio de examen 1.2:

Resuelve las siguientes cuestiones independientes entre sí:

a) (1 punto) Determinar la ecuación del plano que es perpendicular al segmento de extremos $A(0, -1, 3)$ y $B(2, -1, 1)$ y que pasa por su punto medio.

b) (1 punto) Hallar el área del triángulo cuyos vértices son los cortes de los ejes coordenados con el plano $\pi \equiv 2x + y + 2z - 2 = 0$.

(Selectividad Castilla y León Septiembre 2015.)

Ejercicio de examen 1.3:

(2 puntos) Estudia la curvatura de $f(x) = x^4 - 6x^2 + 7$.

Unidad 2: Matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales II

Ejercicio de examen 2.1:

Halla la matriz $X^2 + Y^2$, sabiendo que X e Y son dos matrices cuadradas que verifican:

$$5X + 3Y = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -4 & 15 \end{pmatrix} \qquad 3X + 2Y = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 9 \end{pmatrix}$$

Ejercicio de examen 2.2:

(2 puntos) Un cocinero adquirió en el mercado ciertas cantidades de patatas, manzanas y naranjas a un precio de $0'5$ euros/kg, $0'75$ euros/kg y 1 euro/kg respectivamente. El importe total de la compra fue de $7'25$ euros. En total realizó una compra de 9 kg. Además, compró 1 kg más de naranjas que de manzanas. ¿Cuántos kg compró de cada producto?

Ejercicio de examen 2.3:

(2 puntos) Una empresa ha decidido mejorar su seguridad instalando 9 alarmas. Un especialista en el tema señala que, dada la estructura de la empresa, sólo puede optar por dos tipos de alarmas A y B. Además afirma

que la seguridad de la empresa se puede expresar como el producto del número de alarmas de tipo A instaladas y el cuadrado de las de tipo B. ¿Cuántas alarmas de cada tipo se han de instalar para maximizar la seguridad?

Ejercicio de examen 2.4:

La probabilidad de que un virus contagie a una persona expuesta al mismo es del 10 %. Calcula la probabilidad de que:

a) (1 punto) Exponiendo a diez personas al virus, haya algún infectado.

b) (1 punto) Exponiendo a diez personas al virus, haya menos de tres personas infectadas.

c) (1'25 puntos) Exponiendo 60 personas al virus, haya 10 o más infectados.

Ejercicio 2.1:

Un país está habitado por dos grupos étnicos, M y N, que se encuentran en las proporciones 75 % y 25 % respectiv amente. Se conoce que la talla de los individuos adultos varones es una normal con $\mu = 170$ cm y $\sigma = 5$ cm para el grupo M , y $\mu = 175$ cm y $\sigma = 5$ cm para el grupo N. Se conviene en que un individuo es alto si su talla es superior a 180 cm. Se pide:

a) Porcentaje de individuos altos en M.

b) Porcentaje de individuos altos en N.

c) Porcentaje de altos en el país.

d) Si un individuo es alto, ¿cuál es la probabilidad de que pertenezca al grupo N?.

Ejercicio de examen 2.5:

(1 punto) Hallar el área comprendida entre la curva $y = x^3 - x$, el eje X y las rectas x=0 y x=2.

Unidad 3: Matemáticas I.

Ejercicio 3.1:

Transforma en forma polar (numerador y denominador por separado) y opera tanto en forma polar como binómica:
$\dfrac{2\sqrt{2}-2\sqrt{2}i}{i+1}$.

Ejercicio 3.2:

Clasifica el siguiente sistema según el número de soluciones que tiene y resuélvelo si es posible:

$$\left\{\begin{array}{c} 3x+4y+5z=50 \\ 2x+3y+4z=38 \\ x+2y+z=16 \end{array}\right\}$$

Ejercicio 3.3:

Escribe todas las ecuaciones (con nombre) de las rectas que cumplen las siguientes condiciones:

a) Pasa por $A(3,2)$ y $B(4,-1)$.

b) Pasa por $A(4,3)$ y tiene por vector director $\overrightarrow{v}=(3,-4)$.

Ejercicio 3.4:

Estudia el crecimiento de las siguientes funciones:

a) $a(x) = x^4 - 4x^2$.

b) $b(x) = x^3 - 3x$.

Ejercicio 3.5:

Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $x^4 - 5x^2 - 6 = 0$.

b) $x^6 - 9x^3 + 8 = 0$.

c) $x^8 - 17x^4 + 16 = 0$.

Ejercicio de examen 3.1:

(1 punto) Resuelve la siguiente ecuación:

$$\log(x + 2) + \log(x + 4) = \log(8x + 23).$$

Unidad 4: Matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales I.

Ejercicio 4.1:

Un instalador de vallas publicitarias ha comprobado que puede ofertar instalaciones de 100 metros, 200 metros y 300 metros a 500 euros, 800 euros y 900 euros respectivamente, con un tope de 300 metros de longitud. Calcula la parábola que pasa por los tres puntos y determina cuánto costaría una instalación de 250 metros.

Ejercicio de examen 4.1:

(2 puntos) Sabiendo que $\log 2 = 0'31$ y $\log 3 = 0'48$ calcula los siguientes logaritmos:

a) $\log 324$.

b) $\log 25$.

c) $\log \dfrac{15}{2}$.

d) $\log \sqrt{180}$.

Ejercicio 4.2:

Calcula los siguientes límites:

a) $\lim_{x\to\infty} \dfrac{x^4-5}{3x^4+8x^2+5}$.

b) $\lim_{x\to\infty} \dfrac{3x^2+4}{4x^3-4}$.

Ejercicio 4.3:

Se ha consultado a un grupo de personas su opinión sobre la comida que se sirve en una cadena de restaurantes. Se han obtenido los siguientes resultados: Pésima (590), muy mala (304), mala (590), regular (890), buena (1040), muy buena (1176) y excelente (410). Responde las siguientes cuestiones:

a) ¿Qué tipo de variable estamos estudiando?

b) Construye la tabla de frecuencias más completa posible.

Ejercicio 4.4:

Resuelve las siguientes ecuaciones irracionales:

a) $\sqrt{3x+4}+2x-4=0$.

b) $\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x+1}=0$.

Ejercicio de examen 4.2:

(2 puntos) Estudia el crecimiento y extremos relativos de la función
$f(x)=\dfrac{x^2+3x+3}{x+2}$.

Unidad 5: Matemáticas académicas (4^{o} ESO).

Ejercicio 5.1: Halla la derivada de las siguientes funciones aplicando la definición de derivada:

$a)$ $f(x) = x^3 - 5x + 8.$

$b)$ $f(x) = 4x^2 - 2x.$

Ejercicio 5.2: Simplifica las siguientes expresiones polinómicas:

$a)$ $2(3x-2)^2 - 3(3x+2)^2 - 2(3x-2)(3x+2).$

$b)$ $\left(2x^2 - 3x + 2\right)\left(-3x^2 + x + 1\right) + (6x - 10)\,x^3.$

$c)$ $\left(\dfrac{2}{3}x - \dfrac{3}{5}\right)\left(\dfrac{3}{2}x^2 + \dfrac{2}{5}\right) + \dfrac{6}{25}.$

Ejercicio de examen 5.1:

(1 punto) Sabiendo que $\operatorname{sen}(\alpha) = -\dfrac{3}{5}$ y que $180^{\text{o}} < \alpha < 270^{\text{o}}$, calcula $\cos(\alpha)$ y $\operatorname{tg}(\alpha)$.

Ejercicio de examen 5.2: (2 puntos) Estudia el dominio de las siguientes funciones:

$a)$ $f(x) = \sqrt{1 - x^2}.$

b) $g(x) = \dfrac{1}{\ln(2x+1)}$.

Ejercicio 5.3:

Halla la posición relativa de los siguientes pares de rectas:

a) $\left\{ \begin{array}{c} r \equiv \{2x + y = 7\} \\ s \equiv \{4x + 2y = 3\} \end{array} \right\}$

b) $\left\{ \begin{array}{c} r \equiv \{2x + y = 6\} \\ s \equiv \{4x - y = 6\} \end{array} \right\}$

c) $\left\{ \begin{array}{c} r \equiv \{y = 2x + 1\} \\ s \equiv \{2y - 4x - 2 = 0\} \end{array} \right\}$

d) $\left\{ \begin{array}{c} r \equiv \{4x + 2y = 8\} \\ s \equiv \{3x + 4y = 11\} \end{array} \right\}$

Ejercicio de examen 5.3:

(1 punto) El área de un rectángulo es 15 metros cuadrados. Si su altura del rectángulo mide $\sqrt{18} - \sqrt{12}$ metros, ¿cuánto mide su base? Racionaliza y extrae factores del resultado.

Unidad 6: Matemáticas aplicadas (4º ESO).

Ejercicio de examen 6.1:

(2 puntos) Dos personas realizan una apuesta de 20 euros cada una. Si la primera persona gana, tendrá el triple del dinero que tendrá la segunda. Si gana la segunda, entonces ambas personas tendrán el mismo dinero. ¿Cuánto dinero tenía cada uno antes de realizar la apuesta?

Ejercicio 6.1:

Extrae del radical todos los factores que sea posible:

a) $\sqrt[3]{128x^5}$.

b) $\sqrt[3]{243a^5b^3c^2}$.

c) $\sqrt[5]{64y^8}$.

Ejercicio de examen 6.2:

(1 punto) Calcula la función inversa de $f(x) = 3x^2 + 2$.

Ejercicio de examen 6.3:

Hemos apuntado las veces que han ido 50 personas al cine en el último año obteniendo los siguientes resultados:

1	3	2	4	1	0	2	0	3	1
5	3	1	5	2	1	3	1	5	1
2	0	3	1	5	0	4	1	2	2
4	5	2	1	3	2	1	5	4	5
2	3	1	2	4	3	5	5	3	2

a) (1 punto) Escribe la tabla de frecuencias completa.

b) (1 punto) Calcula la media.

c) (1 punto) Calcula la desviación típica.

Ejercicio 6.2:

Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones no lineales:

a) $\left\{ \begin{array}{c} y = 4 - x \\ x^2 + y^2 = 8 \end{array} \right\}.$

b) $\left\{ \begin{array}{c} 3x^2 - y^2 = 12 \\ (x-1)^2 + y^2 = 9 \end{array} \right\}.$

Ejercicio de examen 6.4:

(1 punto) Halla el volumen, el área lateral y el área total de un cilindro cuya base mide 5 centímetros de radio y cuya altura es 8 centímetros.

Unidad 7: Matemáticas académicas (3^{o} ESO).

Ejercicio de examen 7.1:

En una bolsa tenemos 5 bolas rojas, 3 azules y dos verdes. Calcula la probabilidad de que al extraer dos bolas sin reemplazamiento:

a) (1 punto) Las dos bolas sean rojas.

b) (1 punto) La segunda bola sea roja.

Ejercicio 7.1:

Escribe la fracción generatriz (simplificada) de los siguientes números decimales:

a) $F = 0'425$.

b) $G = 2'7\widehat{52}$.

c) $H = 4'\widehat{85}$.

d) $G = 5'\widehat{29}$.

e) $H = 1'\widehat{9}$.

Ejercicio de examen 7.2:

(2 puntos) Consideramos los términos $a_3 = 23$ y $a_8 = 58$ de una progresión aritmética. Calcula el primer término, la diferencia, el vigésimo término, la suma de los 20 primeros términos y qué posición ocupa el número 79.

Ejercicio de examen 7.3:

Hemos medido la altura de 100 animales, obteniendo los valores:

Intervalo	$[10,16)$	$[16,22)$	$[22,28)$	$[28,34)$	$[34,40)$	$[40,46)$
Animales	15	18	20	15	17	15

Se pide:

a) (0'75 puntos) Realiza una tabla de frecuencias completa.

b) (0'75 puntos) Realiza un histograma.

Ejercicio 7.2: Realiza las siguientes operaciones con radicales:

a) $-15\sqrt{7} + 4\sqrt{700} - 4\sqrt{2} + 6\sqrt{200}$.

b) $4\sqrt{5} - 9\sqrt{125} + \dfrac{5}{2}\sqrt{500} - 2\sqrt{405} + \dfrac{7}{3}\sqrt{5} - \dfrac{5}{4}\sqrt{20}$.

c) $\dfrac{3}{4}\sqrt[3]{16} - 4\sqrt[3]{2} + \dfrac{7}{12}\sqrt[3]{128} - 2\sqrt[3]{\dfrac{2}{27}}$.

Ejercicio de examen 7.4:

Dado el polinomio $P(x) = 10x^5 + 41x^4 + 36x^3 + 9x^2$.

a) (0.5 puntos) Resuelve la ecuación $P(x) = 0$.

b) (0.5 puntos) Factoriza $P(x)$.

Unidad 8: Matemáticas aplicadas (3$^{\text{o}}$ ESO).

Ejercicio de examen ??:

(2 puntos) Un viticultor tiene un recipiente de forma cilíndrica lleno de vino. Su altura es de 15 metros. El diámetro de la base del recipiente es de 8 metros. Si vende el litro de vino a $5'3$ euros, ¿cuánto dinero ganará?

Ejercicio ??: Realiza las siguientes operaciones combinadas y simplifica el resultado:

a) $\left(\dfrac{3}{2}-\dfrac{8}{3}\cdot\dfrac{7}{2}\right):\left(3+\dfrac{1}{5}+\dfrac{7}{3}:\dfrac{2}{5}\right)$.

b) $-\dfrac{3}{10}\cdot\left(2-\left(\dfrac{1}{5}\right)^2\cdot\dfrac{11}{3}\right)$.

c) $\dfrac{\dfrac{1}{4}-\left(\dfrac{2}{9}+\dfrac{3}{7}\right)}{\dfrac{1}{7}+\dfrac{4}{3}\cdot\dfrac{5}{2}}$.

Ejercicio de examen ??:

(2 puntos) Para una fiesta vamos a realizar dos tipos de pulseras. Las de primer tipo tienen dos bolas rojas y una azul. Las del segundo tipo tienen tres bolas azules y cuatro rojas. Si hemos utilizado 464 bolas rojas y 307

bolas azules, ¿cuántas pulseras de cada tipo hemos hecho?

Ejercicio de examen ??:

(2 puntos) Queremos fabricar una caja de cartulina con forma de prisma cuya base es un hexágono regular de radio 6 centímetros. Su altura es de 10 centímetros. ¿Cuánta cartulina necesitamos para dicha caja? ¿Cuál será el volumen de dicha caja?

Ejercicio ??:

Se ha realizado una encuesta a 50 alumnos de un instituto sobre el número de veces que han ido a ver un partido de fútbol en el año actual. Se han obtenido los siguientes resultados:

2 3	1 3	2 2	0 0	0 1
4 5	3 2	2 1	1 2	3 2
0 5	3 4	5 1	3 4	1 2
3 4	1 1	1 2	1 1	2 1
1 2	3 1	3 0	0 1	1 2

Se pide:

a) Realiza una tabla de frecuencias completa.

b) Calcula la media y la desviación típica.

c) Realiza un diagrama de barras.

d) Calcula los cuartiles de la muestra.

Ejercicio de examen ??:

(2 puntos) Dada la parábola $f(x) = -2x^2 + 8x - 6$, realiza un estudio completo de sus elementos y represéntala.

Unidad 9: Matemáticas 2º ESO.

Ejercicio de examen 8.1:

Para alimentar a 15 familias durante 8 días necesitamos 300 kg de comida. Responde a las siguientes cuestiones:

a) (1 punto) ¿Cuánta comida necesitaremos para alimentar a 10 familias durante 12 días?

b) (1 punto) ¿Cuántos días podremos alimentar a 10 familias con 250 kg de comida?

Ejercicio 8.1:

Efectúa las siguientes operaciones combinadas:

a) $[5 + 2 \cdot 7 + 1] : (6 - 2 \cdot 5)$.

b) $((-2) \cdot (-3) + 14 : (-7)) \cdot 4 - 3$.

c) $(-3) + 2 \cdot (4 + 2 \cdot 5) - 15 \cdot 2$.

d) $(-100) + (200) - (-150) + (-3) \cdot (50)$.

Ejercicio de examen 8.2:

Dados $P(x) = 2x^3 + 3x^2 + 5x - 3$, $Q(x) = -x^3 + 5x^2 - 3x - 3$ y $R(x) = 2x^2 - 5x - 3$, calcula:

a) (1 punto) $P(x) + 2Q(x) + R(x)$.

b) (1 punto) $\frac{1}{2}P(x) + \frac{1}{3}Q(x)$.

c) (1 punto) $P(x) \cdot R(x)$.

Ejercicio de examen 8.3:

(2 puntos) Se lanza una bola en una ruleta de 36 casillas, numeradas del 1 al 36.

a) Calcula la probabilidad de que salga un número múltiplo de 4.

b) Calcula la probabilidad de que sea un número que sea múltiplo de 3 o múltiplo de 5.

Ejercicio 8.2:

Cuatro corredores dan vueltas en un circuito. Uno tarda 200 segundos en completar una vuelta, el segundo tarda 250 segundos, el tercero tarda 5 minutos y el cuarto 150 segundos. Si los tres coinciden al mediodía en la línea de salida, ¿a qué hora volverán a coincidir, de nuevo los cuatro, por primera vez?¿Cuántas vueltas habrá dado cada uno?

Ejercicio de examen 8.4:

(1'5 puntos) Resuelve el siguiente sistema por sustitución:

$$\left\{ \begin{array}{c} 5x + 4y = 7 \\ 2x - 3y = 12 \end{array} \right\}.$$

Unidad 10: Matemáticas 1º ESO.

Ejercicio de examen 9.1: Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) (1'5 puntos) $5(x+5)+4(3-2x)=8(x-3)-12(x-2)$.

b) (1'5 puntos) $\dfrac{4-x}{3}-\dfrac{2(2-5x)}{2}=\dfrac{3(2x-1)}{4}-\dfrac{5-8x}{3}$.

Ejercicio 9.1:

Tenemos en un almacén 48 latas de atún, 84 latas de sardinas y 60 latas de caballa. Queremos dividir las latas en packs, sin que sobre ninguna, que contengan el mismo número de latas, sin mezclar los tipos de productos y que además cada pack tenga la mayor cantidad de latas posibles. ¿Cuántos packs de cada tipo obtenemos?

Ejercicio 9.2:

El triple de un número supera en 16 al número original. ¿Cuál es ese número?

Ejercicio de examen 9.2:

(1 punto) Halla el área de un triángulo isósceles, sabiendo que su base mide 12 centímetros y los lados que son iguales miden 10 centímetros cada uno.

Ejercicio 9.3:

Transforma los siguientes números a notación científica o notación decimal:

a) 120000000.

b) $20004'125$.

c) $0'000000045$.

d) $0'0000087$.

e) $1'456 \cdot 10^6$.

f) $8'34 \cdot 10^9$.

g) $1'573 \cdot 10^{-3}$.

h) $8'964 \cdot 10^{-7}$.

Ejercicio de examen 9.3:

Escribe como una sola potencia y después calcula el resultado:

a) (0’25 puntos) $[(-2)^2 \cdot (-2)^4] : (-2)^5$

b) (0’25 puntos) $(8^3 : 4^3) : (6^2 : 3^2)$

c) (0’25 puntos) $(-2)^4 \cdot [(-8)^2 : 4^2]$

d) (0’25 puntos) $[3^3 \cdot (3^2)^5]^2 : (3^6)^4$

e) (0’25 puntos) $(27 \cdot 3^4) : (3^3)^2$

f) (0’25 puntos) $(25)^3 \cdot 5^4 : 5^2$

Capítulo 1

Matemáticas II.

1.1. Matemáticas II (Ejercicios + exámenes)

Ejercicio 1.1 (Discusión y resolución de sistemas)

Considera el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{cases} x + 2y + (m+3)z = 3 \\ x + y + z = 3m \\ 2x + 4y + 3(m+1)z = 8 \end{cases}\right\}.$$

$a)$ *Discútelo según los valores del parámetro m.*

$b)$ *Resuelve el sistema para $m = -2$.*

(Selectividad Andalucía Junio 2018.)

$a)$ Discútelo según los valores del parámetro m.

En primer lugar escribimos las matrices de coeficientes asociadas al sistema:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & m+3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 3(m+1) \end{pmatrix} \text{ y } A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & m+3 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 3m \\ 2 & 4 & 3(m+1) & 8 \end{array}\right).$$

Primero calculamos el determinante de A (la matriz cuadrada).

Obtenemos que $|A| = 3m+3+4+4m+12-2(m+3)-4-2(3m+3) = -m+3$. Igualamos el determinante a cero y tenemos $-m+3 = 0$. Equivalentemente tenemos que $|A| = 0$ si y solo si $m = 3$. Obtenemos dos casos:

- Si $m \neq 3$, tenemos que $|A| \neq 0$ y, por tanto, tenemos que $\text{rg(A)} = 3$. Dado que A es una submatriz de A^*, tenemos que $\text{rg}(\text{A}^*) \geq \text{rg(A)} = 3$. En particular, tenemos que $\text{rg}(\text{A}^*) = 3$.

  Dado que dichos rangos coinciden con el número de incógnitas, tenemos que el sistema es compatible determinado (aplicando el Teorema de Rouché-Frobenius).

- Si $m = 3$, obtenemos la matriz $A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 6 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 9 \\ 2 & 4 & 12 & 8 \end{array}\right)$. Si restamos a la tercera fila el doble de la primera obtenemos la matriz $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 6 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right)$.

Observamos que la última ecuación equivale a $0 = 2$. Por tanto, el sistema es incompatible.

b) Resuelve el sistema para $m = -2$.

Sabemos por el primer apartado que el sistema será compatible determinado.

En particular tenemos el sistema: $\left\{\begin{array}{c} x + 2y + z = 3 \\ x + y + z = -6 \\ 2x + 4y - 3z = 8 \end{array}\right\}$.

Para resolver, vamos a realizar la operación $F_1 - F_2$. Obtenemos que $y = 9$.

Por otro lado, si a la tercera ecuación le restamos el doble de la primera tenemos $-5z = 2$. Es decir, $z = -\frac{2}{5}$.

Por último, sustituyendo los valores conocidos en la segunda ecuación tenemos $x + 9 - \frac{2}{5} = -6$.

Es decir, $x = -15 + \frac{2}{5} = -\frac{73}{5}$.

En consecuencia, la solución es $(x, y, z) = \left(-\frac{73}{5}, 9, -\frac{2}{5}\right)$.

1.2. Matemáticas II (Ejercicios + exámenes) - Álgebra

Ejercicio 1.2 (Ecuaciones matriciales)

Calcula la matriz X tal que $A \cdot X \cdot A = B$ siendo:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \; y \; B = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 \\ 2 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

(Selectividad Baleares Septiembre 2016.)

En primer lugar despejamos la matriz X de la ecuación. Para ello, multiplicamos por la inversa de A la ecuación por la derecha y por la izquierda a ambos lados de la igualdad. Obtenemos que la matriz X es $X = A^{-1} \cdot B \cdot A^{-1}$. Necesitamos calcular la inversa de A. En primer lugar hallamos $|A| = -1$.

Calculamos la matriz adjunta $A^{\text{adj}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Trasponemos la matriz adjunta: $\left(A^{\text{adj}}\right)^t = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Por lo tanto, la matriz inversa es:

$$A^{-1} = \frac{1}{-1}\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Calculamos $X = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 \\ 2 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$

Operando tenemos que:

$$X = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & -3 \\ -6 & 3 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -2 & -1 & 8 \\ -4 & 3 & -4 \end{pmatrix}$$

1.3. Matemáticas II (Ejercicios + exámenes) - Probabilidad y estadística

Ejercicio 1.3 (Aproximación de la binomial por la normal)

En una ciudad el 10 % *de la población es miope. Se eligen* 500 *personas al azar. ¿Cuál es la probabilidad de que al menos* 55 *de ellas sea miope?*

Llamamos $\mathbf{X}$ a la variable que cuenta el número de personas miopes eligiendo 500 al azar. Observamos que tenemos un experimento (comprobar si la persona elegida es miope) que se repite 500 veces y la probabilidad de éxito es $0'1$. Así $\mathbf{X} \equiv \text{Bin}(500, 0'1)$.

Nos piden calcular $P(\mathbf{X} \geq 55)$. Si descomponemos en sucesos elementales, tenemos que calcular más de 400 probabilidades. Si consideramos el suceso complementario, también tendremos que calcular más de cincuenta. Por tanto, y dado que n es grande, vamos a aproximar esta probabilidad mediante una variable normal $\mathbf{Y}$ cuyas media y desviación típica coincidan con las de $\mathbf{X}$.

Calculamos $\mathbf{X} = 500 \cdot 0'1 = 50$ y $\sigma_{\mathbf{X}} = \sqrt{500 \cdot 0'1 \cdot 0'9} = \sqrt{45} \approx 6'708$. Es decir, consideramos $\mathbf{Y} \equiv \text{N}(50, 6'708)$.

Mediante la corrección por continuidad aproximamos la probabilidad original como: $P(\mathbf{X} \geq 55) = P(\mathbf{Y} \geq 54'5)$.

Dado que $\mathbf{Y}$ no está tipificada, tipificamos la segunda probabilidad. Obtenemos: $P(\mathbf{X} \geq 55) = P\left(\dfrac{\mathbf{Y} - 50}{6'708} \geq \dfrac{54'5 - 50}{6'708}\right)$.

Operando (redondeamos a dos cifras decimales la fracción de la derecha) tenemos: $P(\mathbf{X} \geq 55) = P\left(\mathbf{Z} \geq 0'67\right)$.

Dado que la desigualdad de la probabilidad es $\geq$ y el número es positivo, utilizamos el suceso complementario.

Tenemos: $P(\mathbf{X} \geq 55) = 1 - P\left(\mathbf{Z} \leq 0'67\right)$.

Buscamos en la tabla el valor: $P(\mathbf{X} \geq 55) = 1 - 0'7486 = 0'2514$.

1.4. Matemáticas II (Ejercicios + exámenes) - Geometría

Ejercicio 1.4 (Perpendicular común)

Halla la perpendicular común a las siguientes rectas:

$r \equiv (x, y, z) = (1 + \lambda, 2 - \lambda, 3 - 5\lambda)$ *y*

la recta s que es la recta común a los planos $\sigma \equiv x + 3y - z = 3$ *y* $\sigma' \equiv x - y + z = 2$.

Vamos a escribir la perpendicular común (la llamamos t) a las dos rectas como intersección de dos planos:

- El plano π perpendicular a s y que contiene a r.
- El plano π' perpendicular a r que contiene a s.

En particular el plano π contendrá a las rectas r y t. Por otro lado el plano π' contendrá a las rectas s y t. En consecuencia, $t = \pi \cap \pi'$.

Para calcular cualquiera de los dos planos, necesitaremos el vector $\overrightarrow{v_t}$, que a su vez depende de los vectores $\overrightarrow{v_r}$ y $\overrightarrow{v_s}$. El vector director de r se obtiene de las ecuaciones $\overrightarrow{v_r} = (1, -1, -5)$.

El vector $\overrightarrow{v_s}$ director de s es perpendicular a $\overrightarrow{n_\sigma}$ y $\overrightarrow{n_{\sigma'}}$. Es decir, tomamos $\overrightarrow{n_\sigma} \times \overrightarrow{n_{\sigma'}} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 1 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 2\overrightarrow{i} - 2\overrightarrow{j} - 4\overrightarrow{k} = (2, -2, -4)$. Usamos el vector $\overrightarrow{v_s} = (1, -1, -2)$.

Calculamos ahora el vector $\overrightarrow{v_t}$ director de la perpendicular común. Dado que es perpendicular a $\overrightarrow{v_r}$ y a $\overrightarrow{v_s}$, tomamos el producto vectorial: $\overrightarrow{v_r} \times \overrightarrow{v_s} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 1 & -1 & -5 \\ 1 & -1 & -2 \end{vmatrix} = -3\overrightarrow{i} - \overrightarrow{j} = (-3, -3, 0)$. Utilizamos el vector proporcional $\overrightarrow{v_t} = (1, 1, 0)$.

Comenzamos por el plano π. Este plano contiene a r, por tanto a $\overrightarrow{v_r}$ y al punto $A(1, 2, 3) \in r$. Además contiene a la dirección $\overrightarrow{v_t}$. Es decir, la ecuación es $\pi \equiv \begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z-3 \\ 1 & -1 & -5 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$.

Operando tenemos $\pi \equiv 5x - 5y + 2z - 1 = 0$.

Para obtener el plano π' necesitamos la dirección de t, la dirección de s y un punto de s. Nos falta el punto de s. Hacemos $y = 0$ (por ejemplo) y resolvemos $\left\{\begin{array}{l} x - z = 3 \\ x + z = 2 \end{array}\right\}$. Tenemos las soluciones $x = \frac{5}{2}$, $z = -\frac{1}{2}$.

Obtenemos $B\left(\frac{5}{2}, 0, -\frac{1}{2}\right)$. Por tanto, $\pi' \equiv \begin{vmatrix} x - \frac{5}{2} & y & z + \frac{1}{2} \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$. Operando tenemos $-2x + 2y + 2z + 6 = 0$. Simplificando $\pi' \equiv -x + y + z + 3 = 0$.

Por tanto la recta $t \equiv \left\{\begin{array}{c} 5x - 5y + 2z - 1 = 0 \\ -x + y + z + 3 = 0 \end{array}\right\}$.

1.5. Matemáticas II (Ejercicios + exámenes) - Análisis

Ejercicio de examen 1.1 (Clasificación de discontinuidades)

(2 puntos) Estudia la continuidad de la función:

$$f(x) = \begin{cases} 4x + 2 & si\ x \leq -1 \\ -x & si\ -1 < x < 1 \\ \dfrac{x-3}{x^2 - 5x + 6} & si\ x \geq 1 \end{cases}.$$

Clasifica las discontinuidades.

La función de la primera rama es polinómica; por tanto, es continua en $(-\infty, -1)$. Recordamos que no podemos añadir el -1, dado que en ese punto se produce un cambio de rama.

La función de la segunda rama también es polinómica; por tanto, es continua en $(-1, 1)$.

La tercera rama está definida mediante una función racional en la que numerador y denominador son continuas. Por tanto, la fracción será continua en su dominio. El dominio serán todos los valores que no anulan al denominador.

Resolvemos la ecuación de segundo grado asociada al denominador. Sustituyendo en la fórmula tenemos: $x = \dfrac{5 \pm \sqrt{(-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6}}{2 \cdot 1} = \dfrac{5 \pm 1}{2}$. Es decir, tenemos las soluciones $x = 2$ y $x = 3$. Dado que ambas raíces pertenecen al intervalo de definición de la rama, afectan a la continuidad.

En particular, la tercera rama es continua en $(1, 2) \cup (2, 3) \cup (3, \infty)$.

Debemos, por tanto estudiar qué ocurre en los puntos $x = -1$, $x = 1$, $x = 2$ y $x = 3$. En estos dos últimos valores sabemos que la función es discontinua al no estar definida la función en esos puntos.

$\underline{x = -1.}$

Al tratarse de un cambio de rama, debemos estudiar los límites laterales:

- $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to -1} (-x) = 1.$
- $\lim\limits_{x\to -1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to -1} (4x+2) = -2.$

Dado que los límites laterales son distintos, tenemos que $\nexists \lim\limits_{x\to -1} f(x)$. Por tanto, la función no es continua en $x = -1$. Al ser ambos límites finitos, tenemos una **discontinuidad de salto finito**.

<u>$x = 1$.</u>

De nuevo, al ser un cambio de rama, estudiamos ambos límites laterales:

- $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1} \left(\dfrac{x-3}{x^2-5x+6}\right) = -1.$
- $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1}(-x) = -1.$

Dado que ambos límites laterales son iguales tenemos que $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = -1$. Comprobamos ahora si la función es continua. Para ello, $f(1)$ debe coincidir con el límite anterior. En efecto, tenemos $f(1) = -1$. Por tanto, $f(x)$ **es continua en** $x = 1$.

<u>$x = 2$.</u>

En primer lugar observamos que $\nexists f(2)$. Al no ser un punto en el que se produce un cambio de rama, calculamos directamente el límite. Esta vez, tenemos $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = \lim\limits_{x\to 2} \left(\dfrac{x-3}{x^2-5x+6}\right) = \left[\dfrac{-1}{0}\right]$. Al tener este tipo de indeterminación sabemos que en $x = 2$ existe una **discontinuidad de salto infinito**.

Por completitud del estudio del límite estudiamos los límites laterales:

- $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^+}\left(\dfrac{x-3}{x^2-5x+6}\right) = \dfrac{-1}{0^-} = +\infty.$

- $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^-}\left(\dfrac{x-3}{x^2-5x+6}\right) = \dfrac{-1}{0^+} = -\infty.$

$\underline{x = 3.}$

En primer lugar recordamos que $\nexists f(3)$; por tanto la función no puede ser continua.

Al ser $x = 3$ un valor en el que no cambia la rama, podemos estudiar directamente el límite.

Tenemos $\lim\limits_{x\to 3} f(x) = \lim\limits_{x\to 3}\left(\dfrac{x-3}{x^2-5x+6}\right) = \left[\dfrac{0}{0}\right]$. Aplicamos la Regla de L'Hôpital para resolver la indeterminación.

Obtenemos $\lim\limits_{x\to 3}\left(\dfrac{x-3}{x^2-5x+6}\right) = \lim\limits_{x\to 3}\left(\dfrac{1}{2x-5}\right) = 1.$

Dado que existe $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$, pero no existe $f(3)$ tenemos que en $x = 3$ hay una **discontinuidad evitable**.

Es decir, $f(x)$ es continua en $\mathbb{R} - \{-1, 2, 3\}$.

- En $x = -1$ hay una discontinuidad de salto finito.

- En $x = 2$ una de salto infinito.

- En $x = 3$ una evitable.

1.6. Matemáticas II (Ejercicios)

Ejercicio de examen 1.2 (Planos - Producto vectorial)

Resuelve las siguientes cuestiones independientes entre sí:

a) *(1 punto) Determinar la ecuación del plano que es perpendicular al segmento de extremos* $A(0,-1,3)$ *y* $B(2,-1,1)$ *y que pasa por su punto medio.*

b) *(1 punto) Hallar el área del triángulo cuyos vértices son los cortes de los ejes coordenados con el plano* $\pi \equiv 2x+y+2z-2=0$.

(Selectividad Castilla y León Septiembre 2015.)

a) Determinar la ecuación del plano que es perpendicular al segmento de extremos $A(0,-1,3)$ y $B(2,-1,1)$ y que pasa por su punto medio.

Para encontrar la ecuación implícita del plano, emplearemos su vector normal que es proporcional al $\overrightarrow{AB} = (2,0,-2)$. Tomamos el vector proporcional $(1,0,-1)$. Es decir, el plano π perpendicular al segmento $\overline{AB}$ es de la forma $x-z+D=0$.

Por otro lado, el plano π pasa por el punto medio de A y B. Dicho punto medio M, se obtiene como la semisuma de las coordenadas de A y B. Es decir, tenemos $M(1,-1,2)$. Dado que $M \in \pi$, debe ser cierto $1-2+D=0$. Es decir, $D = 1$. Por tanto, el plano es $\pi \equiv x - z + 1 = 0$.

b) Hallar el área del triángulo cuyos vértices son los cortes de los ejes coordenados con el plano $\pi \equiv 2x + y + 2z - 2 = 0$.

Buscamos el punto A, que es la intersección del eje X con el plano π. Las ecuaciones implícitas del eje X son $\left\{ \begin{array}{c} y = 0 \\ z = 0 \end{array} \right\}$. Por tanto, el punto A se obtiene como solución $\left\{ \begin{array}{c} 2x + y + 2z - 2 = 0 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{array} \right\}$. El punto es $A(1,0,0)$.

El vértice B es el corte del eje Y con el plano π. Las ecuaciones del eje Y son $\left\{ \begin{array}{c} x = 0 \\ z = 0 \end{array} \right\}$. Resolviendo el sistema correspondiente, tenemos que $B(0,2,0)$.

El vértice C es el corte del eje Z con el plano π. Las ecuaciones del eje Z son $\left\{ \begin{array}{c} x = 0 \\ y = 0 \end{array} \right\}$. Resolviendo el sistema correspondiente, tenemos que $C(0,0,1)$.

Ahora bien, el área del triángulo ABC es la mitad del módulo del producto vectorial $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$. Calculamos los vectores correspondientes:

$\overrightarrow{AB} = (-1, 2, 0)$ y $\overrightarrow{AC} = (-1, 0, 1)$.

Calculamos $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2\vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k} = (2, 1, 2)$.

El módulo es $\left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right| = \sqrt{2^2 + 1^2 + 2^2} = \sqrt{9} = 3$. Por tanto, el área del triángulo es $\frac{3}{2}\text{u}^2$.

1.7. Matemáticas II (Exámenes)

Ejercicio de examen 1.3 (Curvatura de una función)

(2 puntos) Estudia la curvatura de $f(x) = x^4 - 6x^2 + 7$.

Al tratarse de un polinomio, la función es continua en todos los reales.

Calculamos la segunda derivada.

Tenemos $f'(x) = 4x^3 - 12x$ y $f''(x) = 12x^2 - 12$.

Resolvemos la ecuación $f''(x) = 0$. Es decir, la ecuación $12x^2 - 12 = 0$. Pasamos el 12 a la derecha sumando obteniendo $12x^2 = 12$. Dividiendo entre 12 tenemos $x^2 = 1$. Tomando raíces cuadradas a los dos lados tenemos $x = \pm 1$.

Consideramos ahora el signo de $f''(x)$ en los intervalos definidos por los puntos de discontinuidad (ninguno en este caso) y por las soluciones de $f''(x) = 0$. Tenemos por tanto:

Intervalo	$x \in (-\infty, -1)$	$x \in (-1, 1)$	$x \in (1, \infty)$
Signo de $f''(x)$	$+$	$-$	$+$
Curvatura de $f(x)$	$\cup$	$\cap$	$\cup$

Observamos que hay dos puntos de inflexión: En $x = -1$ y en $x = 1$. Hallamos las imágenes correspondientes: $f(-1) = 2$ y $f(1) = 2$. Por tanto, los puntos de inflexión son $(-1, 2)$ y $(1, 2)$.

Capítulo 2

Matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales.

2.1. Matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales II (Ejercicios + exámenes)

Ejercicio de examen 2.1 (Sistema de ecuaciones matriciales)

Halla la matriz $X^2 + Y^2$, sabiendo que X e Y son dos matrices cuadradas que verifican:

$$5X + 3Y = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -4 & 15 \end{pmatrix} \qquad 3X + 2Y = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 9 \end{pmatrix}$$

Si llamamos $C = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -4 & 15 \end{pmatrix}$ y $D = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 9 \end{pmatrix}$, el sistema original se puede escribir como $\left\{ \begin{array}{l} 5X + 3Y = C \\ 3X + 2Y = D \end{array} \right\}$.

Resolvemos el sistema por reducción. Multiplicando la primera ecuación por 2 y la segunda por -3 tenemos $\left\{ \begin{array}{r} 10X + 6Y = 2C \\ -9X - 6Y = -3D \end{array} \right\}$.

Sumando tenemos $X = 2C - 3D$.

Sustituyendo en la primera ecuación tenemos que $5(2C - 3D) + 3Y = C$. Elimnando el paréntesis tenemos que $10C - 15D + 3Y = C$. Pasando los términos con C y D a la derecha tenemos que $3Y = 15D - 9C$. Es decir, $Y = 5D - 3C$.

Operando tenemos:

- $X = 2\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -4 & 15 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$
- $Y = 5\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 9 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -4 & 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -5 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$

Calculamos X^2 e Y^2:

- $X^2 = \begin{pmatrix} -5 & 12 \\ -8 & 3 \end{pmatrix}$
- $Y^2 = \begin{pmatrix} -9 & 5 \\ -2 & -10 \end{pmatrix}$

Por tanto, $X^2 + Y^2 = \begin{pmatrix} -14 & 17 \\ -10 & -7 \end{pmatrix}$

2.2. Matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales II (Ejercicios + exámenes) - Álgebra

Ejercicio de examen 2.2 (Planteamiento y resolución de un sistema)
(2 puntos) Un cocinero adquirió en el mercado ciertas cantidades de patatas, manzanas y naranjas a un precio de $0'5$ *euros/kg,* $0'75$ *euros/kg y* 1 *euro/kg respectivamente. El importe total de la compra fue de* $7'25$ *euros. En total realizó una compra de* 9 *kg. Además, compró* 1 *kg más de naranjas que de manzanas. ¿Cuántos kg compró de cada producto?*

Llamamos x al número de kilos de patatas que se han comprado; llamamos y al número de kilos de manzanas y llamamos z al número de kilos de naranjas.

Dado que la compra es de 9 kilos, la suma de los pesos de las compras de patatas, manzanas y naranjas es 9. Es decir, tenemos que $x + y + z = 9$.

El gasto en patatas es de $0'5$ multiplicado por el número de kilos de patatas; es decir, $0'5x$. De igual manera el gasto en mananas es de $0'75y$ y el gasto en naranjas z. El gasto total es $0'5x + 0'75y + z = 7'25$

Así, el sistema queda como sigue: $\left\{ \begin{array}{c} x + y + z = 9 \\ 0,5x + 0,75 + z = 7,25 \\ z = y + 1 \end{array} \right\}.$

Multiplicando la segunda ecuación por 100 tenemos el sistema:

$$\left\{ \begin{array}{c} x + y + z = 9 \\ 50x + 75y + 100z = 725 \\ -y + z = 1 \end{array} \right\}.$$

Resolvemos por Gauss. En primer lugar realizamos $e_2 \to e_2 - 50e_1$. Tenemos:

$$\left\{ \begin{array}{c} x + y + z = 9 \\ 50x + 75y + 100z = 725 \\ -y + z = 1 \end{array} \right\} \overset{e_2 \to e_2 - 50e_1}{\to} \left\{ \begin{array}{c} x + y + z = 9 \\ 25y + 50z = 275 \\ -y + z = 1 \end{array} \right\}$$

Dividiendo la segunda ecuación entre 25, tenemos: $\left\{ \begin{array}{c} x + y + z = 9 \\ y + 2z = 11 \\ -y + z = 1 \end{array} \right\}.$

Realizamos la operación $e_3 \to e_3 + e_2$.

Tenemos $\left\{\begin{array}{c} x+y+z=9 \\ y+2z=11 \\ -y+z=1 \end{array}\right\} \overset{e_3\to e_3+e_2}{\to} \left\{\begin{array}{c} x+y+z=9 \\ y+2z=11 \\ 3z=12 \end{array}\right\}$

De la última ecuación obtenemos que $z = 4$, sustituyendo en la segunda obtenemos que $y + 8 = 11$. Despejando tenemos $y = 3$; sustituyendo en la primera obtenemos que $x+3+4 = 9$. Es decir, $x = 2$. Por lo tanto, compró 2 kg de patatas, 3 kg de manzanas y 4 kg de naranjas.

2.3. Matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales II (Ejercicios + exámenes) - Análisis

Ejercicio de examen 2.3 (Optimización)

(2 puntos) Una empresa ha decidido mejorar su seguridad instalando 9 alarmas. Un especialista en el tema señala que, dada la estructura de la empresa, sólo puede optar por dos tipos de alarmas A y B. Además afirma que la seguridad de la empresa se puede expresar como el producto del número de alarmas de tipo A instaladas y el cuadrado de las de tipo B. ¿Cuántas alarmas de cada tipo se han de instalar para maximizar la seguridad?

Llamamos x al número de alarmas de tipo A instaladas e y al número de alarmas de tipo B instaladas.

Como en total se instalan 9 alarmas, entonces tenemos que la restricción es $x + y = 9$. La función a maximizar es $f(x, y) = x \cdot y^2$.

Despejamos x de la restricción. Obtenemos $x = 9 - y$.

Sustituyendo obtenemos $f(y) = (9 - y) \cdot y^2 = 9y^2 - y^3$, con la variable en el intervalo $0 \leq y \leq 9$.

Derivando obtenemos $f'(y) = 18y - 3y^2$. Igualando la derivada a 0 tenemos $18y - 3y^2 = 0$. Sacando factor común tenemos $3y(6 - y) = 0$. Es decir, tenemos $y = 0$ o $y = 6$. Estudiamos el crecimiento de $f(y)$ con $y \in [0, 9]$.

Intervalo	$y \in (0, 6)$	$y \in (6, 9)$
Signo de f'	$+$	$-$
Crecimiento de f	$\nearrow$	$\searrow$

Hay un máximo para $y = 6$, es decir, se maximiza la seguridad cuando se instalan 3 alarmas de tipo A y 6 alarmas de tipo B.

De manera análoga, en vez de estudiar el crecimiento de f, podríamos sustituir los valores $y = 0$ (extremo del intervalo), $y = 6$ (valor crítico) e $y = 9$ (extremo del intervalo). Tenemos $f(0) = 0$, $f(6) = 108$ y $f(9) = 0$. Por tanto, el máximo se obtiene para $y = 6$.

2.4. Matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales II (Ejercicios + exámenes) - Probabilidad y estadística

Ejercicio de examen 2.4 (Binomial - Aproximación por la normal)

La probabilidad de que un virus contagie a una persona expuesta al mismo es del $10\,\%$*. Calcula la probabilidad de que:*

a) *(1 punto) Exponiendo a diez personas al virus, haya algún infectado.*

b) *(1 punto) Exponiendo a diez personas al virus, haya menos de tres personas infectadas.*

c) *(1'25 puntos) Exponiendo* 60 *personas al virus, haya* 10 *o más infectados.*

a) Exponiendo a diez personas al virus, haya algún infectado.

En primer lugar observamos que la probabilidad de que una persona se contagie del virus se calcula pasando el $10\,\%$ a decimal, dividiendo entre 100. Es decir, la probabilidad es $0'1$. Llamamos p a dicha probabilidad.

Ahora, tenemos un experimento que se realiza 10 veces, que es exponer una persona al virus y ver si se contagia. La probabilidad de que ocurra (de éxito) es $p = 0'1$. Por tanto tenemos una variable $\mathbf{X} \equiv \text{Bin}(10, 0'1)$, que cuenta el número de infectados de entre las diez personas.

En esta ocasión debemos calcular $P(\mathbf{X} \geq 1)$. Esta probabilidad necesita calcular diez probabilidades. Por tanto, empleamos el complementario. Tenemos, la expresión: $P(\mathbf{X} \geq 1) = 1 - P(\mathbf{X} < 1) = 1 - P(\mathbf{X} = 0)$.

Operando tenemos que $P(\mathbf{X} = 0) = \binom{10}{0} \cdot 0'1^0 \cdot 0'9^{10} = 0'349$.

Por tanto, tenemos que $P(\mathbf{X} \geq 1) = 1 - P(\mathbf{X} = 0) = 1 - 0'349 = 0'651$.

b) Exponiendo a diez personas al virus, haya menos de tres personas infectadas.

El experimento de partida es el mismo del apartado *a*). Por tanto, podemos utilizar la misma $\mathbf{X}$.

Ahora queremos calcular $P(\mathbf{X} < 3) = P(\mathbf{X} = 0) + P(\mathbf{X} = 1) + P(\mathbf{X} = 2)$.

Calculamos:

- $P(\mathbf{X} = 1) = \binom{10}{1} \cdot 0'1^1 \cdot 0'9^9 = 0'387$.
- $P(\mathbf{X} = 2) = \binom{10}{2} \cdot 0'1^2 \cdot 0'9^8 = 0'194$.

En consecuencia: $P(\mathbf{X} < 3) = 0'349 + 0'387 + 0'194 = 0'93$.

c) Exponiendo 60 personas al virus, haya 10 o más infectados.

En esta ocasión el experimento cambia, ya que tenemos 60 personas en lugar de 10. Por tanto, redefinimos la variable $\mathbf{X} \equiv \text{Bin}(60, 0'1)$.

Queremos calcular $P(\mathbf{X} \geq 10)$. Dado que en esta ocasión el valor de n (número de veces que se repite el experimento) es grande (mayor que 30), aproximamos la variable binomial por una normal. Calculamos, por tanto, $E[\mathbf{X}] = n \cdot p = 60 \cdot 0'1 = 6$ y $V[\mathbf{X}] = n \cdot p \cdot (1-p) = 60 \cdot 0'1 \cdot 0'9 = 5'4$.

Es decir, aproximamos $\mathbf{X}$ por la variable $\mathbf{Y} \equiv \text{N}\left(6, \sigma^2 = 5'4\right)$.

Dado que realizamos una aproximación de una variable discreta por otra continua, debemos realizar la corrección por continuidad (o de Yates). Es decir, tenemos que $P(\mathbf{X} \geq 10) = P(\mathbf{Y} \geq 9'5)$.

Ahora, al ser la variable normal, debemos tipificarla. Obtenemos la igualdad $P(\mathbf{Y} \geq 9'5) = P\left(\frac{\mathbf{Y}-6}{\sqrt{5'4}} \geq \frac{9'5-6}{\sqrt{5'4}}\right)$. La primera fracción es equivalente a $\mathbf{Z}$ y la segunda (redondeando) vale $1'51$.

Es decir, $P(\mathbf{Y} \geq 9'5) = P(\mathbf{Z} \geq 1'51)$.

Para tener una desigualdad del tipo $\leq$, utilizamos el suceso complementario. Es decir, tenemos que $P(\mathbf{Z} \geq 1'51) = 1 - P(\mathbf{Z} \leq 1'51)$. Buscando dicho valor en la tabla de la normal tipificada tenemos que la probabilidad es $P(\mathbf{Z} \geq 1'51) = 1 - 0'9345 = 0'0655$.

Es decir, la probabilidad de que haya diez o más infectados es de $0'0655$.

2.5. Matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales II (Ejercicios)

Ejercicio 2.1 (Probabilidad)

Un país está habitado por dos grupos étnicos, M y N, que se encuentran en las proporciones 75 % y 25 % respectiv amente. Se conoce que la talla de los individuos adultos varones es una normal con $\mu = 170$ *cm y* $\sigma = 5$ *cm para el grupo* M *, y* $\mu = 175$ *cm y* $\sigma = 5$ *cm para el grupo N. Se conviene en que un individuo es alto si su talla es superior a* 180 *cm. Se pide:*

a) *Porcentaje de individuos altos en* M.

b) *Porcentaje de individuos altos en* N.

c) *Porcentaje de altos en el país.*

d) *Si un individuo es alto, ¿cuál es la probabilidad de que pertenezca al grupo N?.*

a) Porcentaje de individuos altos en M.

Llamamos M al suceso *el individuo pertenece a la etnia* M y N al suceso *el individuo pertenece a la etnia* N. Tenemos $P(M) = 0'75$ y $P(N) = 0'25$. Por otro lado llamamos A al suceso *el individuo es alto*.

Nos piden calcular el porcentaje de individuos altos en M. Para ello tenemos que calcular la probabilidad de ser alto en M y multiplicarla por 100 para obtener el porcentaje.

Llamamos X a la variable aleatoria que mide la altura de los varones del grupo M. Por el enunciado X sigue una distribución normal de media 170 y desviación típica 5, por lo que $P(A/M) = P(X > 180)$. Tipificando tenemos $P(A/M) = P\left(\frac{X-170}{5} > \frac{180-170}{5}\right) = P(Z > 2)$. Tomando el complementario tenemos $P(A/M) = 1 - P(Z \leq 2) = 1 - 0'9772 = 0'0228$.

Por tanto, el porcentaje de individuos altos en M es el $2'28\,\%$.

b) Porcentaje de individuos altos en N.

Nos piden calcular el porcentaje de individuos altos en N. Para ello tenemos que calcular la probabilidad de ser alto en N y multiplicarla por 100 para obtener el porcentaje.

Si tenemos que Y es la variable aleatoria altura de los varones del grupo

N, entonces Y sigue una distribución normal de media 175 y desviación típica 5, por lo que $P(A/N) = P(Y > 180)$. Tipificando tenemos que $P(A/N) = P\left(\frac{Y-175}{5} > \frac{180-175}{5}\right) = P(Z > 1)$. Tomando el suceso complementario tenemos $P(A/N) = 1 - P(Z \leq 1) = 1 - 0'8413 = 0'1587$.

Por tanto, el porcentaje de individuos altos en N es el $15'87\,\%$.

c) Porcentaje de altos en el país.

Aplicando el Teorema de la probabilidad total tenemos:

$P(A) = P(M) \cdot P(A/M) + P(N) \cdot P(A/N)$.

Sustituyendo tenemos:

$P(A) = 0'75 \cdot 0'0228 + 0'25 \cdot 0'1587 = 0'05678$.

Por lo tanto, el porcentaje de individuos altos en el país es el $5'68\,\%$.

d) Si un individuo es alto, ¿cuál es la probabilidad de que pertenezca al grupo N?.

Aplicando el Teorema de Bayes tenemos:

$$P(N|A) = \frac{P(N) \cdot P(A|N)}{P(A)} = \frac{0'25 \cdot 0'1587}{0'05678} = 0'6988.$$

2.6. Matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales II (Exámenes)

Ejercicio de examen 2.5 (Cálculo de áreas)

(1 punto) Hallar el área comprendida entre la curva $y = x^3 - x$, el eje X y las rectas x=0 y x=2.

En primer lugar averiguamos los puntos de corte de la curva con el eje X, para ello resolvemos $x^3 - x = 0$. Sacando factor común $x(x^2 - 1) = 0$. Es decir, $x = 0$ o $x^2 - 1 = 0$. Es decir, $x = 1$ y $x = -1$.

El punto donde $x = -1$ no es de nuestro interés, puesto que debemos integrar entre $x = 0$ y $x = 2$. Sin embargo, el punto donde $x = 1$ debemos tenerlo en cuenta puesto que hay un cambio de signo. Estudiamos el signo de la función. Tenemos:

Si $0 < x < 1$, tenemos $x^3 - x < 0$, y por lo tanto la curva va por debajo del eje X.

Si $1 < x < 2$, tenemos $x^3 - x > 0$, y por lo tanto la curva va por encima del eje X.

Así, el área pedida es:

$$\text{Área} = \int_0^1 (-x^3+x)\,\mathrm{d}x + \int_1^2 (x^3-x)\,\mathrm{d}x = \left[-\frac{x^4}{4}+\frac{x^2}{2}\right]_0^1 + \left[\frac{x^4}{4}-\frac{x^2}{2}\right]_1^2 = \frac{5}{2}\mathrm{u}^2.$$

Capítulo 3

Matemáticas I.

3.1. Matemáticas I (Ejercicios + exámenes)

Ejercicio 3.1 (Operaciones con números complejos)

Transforma en forma polar (numerador y denominador por separado) y opera tanto en forma polar como binómica:
$\dfrac{2\sqrt{2}-2\sqrt{2}i}{i+1}$.

En primer lugar, realizamos la operación en forma binómica:
Multiplicamos y dividimos por el conjugado: $\dfrac{2\sqrt{2}-2\sqrt{2}i}{i+1}\dfrac{1-i}{1-i}$. Operando en el numerador y denominador tenemos $\dfrac{2\sqrt{2}-2\sqrt{2}i-2\sqrt{2}i+2\sqrt{2}i^2}{1^2-i^2}$.
Teniendo en cuenta que $i^2=-1$ y simplificando tenemos:
$\dfrac{2\sqrt{2}-2\sqrt{2}i-2\sqrt{2}i+2\sqrt{2}(-1)}{2}=\dfrac{-4\sqrt{2}i}{2}=-2\sqrt{2}i$.
Dado que es un número imaginario puro, su módulo coincide con su coeficiente de la i (en valor absoluto) y dado que el coeficiente es negativo, su

argumento es 270°.

Es decir, el resultado en forma polar es $2\sqrt{2}_{270^\circ}$. (Este último paso no lo pide el ejercicio, pero se realiza para comprobar que ambos caminos coinciden en la solución)

Escribimos ahora el numerador $z = 2\sqrt{2} - 2\sqrt{2}i$ en forma polar. Su módulo es $|z| = \sqrt{(2\sqrt{2})^2 + (-2\sqrt{2})^2} = \sqrt{16} = 4$.

Para hallar el argumento, tenemos que considerar que z está en el cuarto cuadrante y calcular $\arctan\left(\frac{\operatorname{Im} z}{\operatorname{Re} z}\right) = \arctan\left(\frac{-2\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}\right) = \arctan(-1) = 315^\circ$. Es decir $z = 4_{315^\circ}$.

Por otro lado, escribimos el denominador $w = 1 + i$ en forma polar.

El módulo de w será $|w| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$. El número w está en el primer cuadrante. Su argumento es $\arctan\left(\frac{\operatorname{Im} w}{\operatorname{Re} w}\right) = \arctan(1) = 45^\circ$. Es decir, $w = \sqrt{2}_{45^\circ}$.

El cociente $\frac{z}{w}$ se realiza (en forma polar) dividiendo los módulos y restando los argumentos. Es decir $\frac{z}{w} = \frac{4_{315^\circ}}{\sqrt{2}_{45^\circ}} = \left(\frac{4}{\sqrt{2}}\right)_{315^\circ - 45^\circ} = 2\sqrt{2}_{270^\circ}$.

3.2. Matemáticas I (Ejercicios + exámenes) - Números y álgebra

Ejercicio 3.2 (Resolución de un sistema de ecuaciones)

Clasifica el siguiente sistema según el número de soluciones que tiene y resuélvelo si es posible:

$$\left\{\begin{array}{c} 3x+4y+5z=50 \\ 2x+3y+4z=38 \\ x+2y+z=16 \end{array}\right\}$$

Colocamos los coeficientes de las ecuaciones en una matriz y operamos para obtener una matriz escalonada (Con ceros): $\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 4 & 5 & 50 \\ 2 & 3 & 4 & 38 \\ 1 & 2 & 1 & 16 \end{array}\right)$

En primer lugar, realizamos $F_2 \to 2F_1 - 3F_2$ y $F_3 \to F_1 - 3F_3$. Tenemos:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 4 & 5 & 50 \\ 2 & 3 & 4 & 38 \\ 1 & 2 & 1 & 16 \end{array}\right) \xrightarrow[F_3 \to F_1 - 3F_3]{F_2 \to 2F_1 - 3F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 4 & 5 & 50 \\ 0 & -1 & -2 & -14 \\ 0 & -2 & 2 & 2 \end{array}\right)$$

Simplificamos la tercera fila $F_3 \to \frac{F_3}{2}$. Tenemos:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 4 & 5 & 50 \\ 0 & -1 & -2 & -14 \\ 0 & -2 & 2 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{F_3 \to \frac{F_3}{2}} \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 4 & 5 & 50 \\ 0 & -1 & -2 & -14 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Para hacer un cero en la tercera fila realizamos $F_3 \to F_3 - F_2$. Obtenemos la matriz escalonada:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 4 & 5 & 50 \\ 0 & -1 & -2 & -14 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{F_3 \to F_3 - F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 4 & 5 & 50 \\ 0 & -1 & -2 & -14 \\ 0 & 0 & 3 & 15 \end{array}\right)$$

Es un sistema compatible determinado; es decir tiene una única solución. La última fila equivale a $3z = 15$. Pasando el 3 dividiendo tenemos que $z = 5$.

Sustituyendo en la penúltima fila, tenemos $-y - 2z = -14$. Es decir, tenemos $-y - 2 \cdot 5 = -14$.

Despejando obtenemos que $y = 4$.

Sustituyendo en la primera fila de la última matriz ($3x + 4y + 5z = 50$), tenemos $3x + 4 \cdot 4 + 5 \cdot 5 = 50$.

Despejando tenemos que $x = 3$.

Es decir, la única solución del sistema es $(x, y, z) = (3, 4, 5)$.

3.3. Matemáticas I (Ejercicios + exámenes) - Geometría

Ejercicio 3.3 (Ecuaciones de la recta)

Escribe todas las ecuaciones (con nombre) de las rectas que cumplen las siguientes condiciones:

$a)$ *Pasa por* $A(3, 2)$ *y* $B(4, -1)$.

$b)$ *Pasa por* $A(4, 3)$ *y tiene por vector director* $\overrightarrow{v} = (3, -4)$.

$a)$ Pasa por $A(3, 2)$ y $B(4, -1)$.

En primer lugar, calculamos el vector director de la recta $\overrightarrow{AB} = (1, -3)$.

La ecuación **vectorial** se escribe utilizando uno de los dos puntos que tenemos a lo que le sumamos el vector $\overrightarrow{AB}$ multiplicado por el parámetro real t. Es decir $(x, y) = (3, 2) + t(1, -3)$.

Para obtener las ecuaciones **paramétricas** debemos realizar las operaciones del miembro de la derecha de la ecuación vectorial y separar las

x por un lado y las y por otro. Escribimos $\left\{ \begin{array}{c} x = 3 + t \\ y = 2 - 3t \end{array} \right\}$.

Para obtener la ecuación **continua** despejamos de las paramétricas ambas t e igualamos los resultados. De la primera ecuación tenemos $t = \dfrac{x-3}{1}$; por la segunda ecuación tenemos $t = \dfrac{y-2}{-3}$. Igualando términos tenemos $\dfrac{x-3}{1} = \dfrac{y-2}{-3}$.

Para obtener la ecuación **general** o **implícita** multiplicamos los dos términos de la ecuación continua en cruz. Obtenemos $-3(x-3) = 1(y-2)$. Es decir, tenemos $-3x+9 = y-2$. Operamos para dejar todos los términos al mismo lado del igual y tenemos $3x + y - 11 = 0$.

Para obtener la ecuación **explícita** despejamos la y.

Obtenemos $y = -3x + 11$.

Por tanto, en particular obtenemos que la pendiente de la recta es -3. Para escribir la ecuación **punto-pendiente** empleamos la fórmula y tenemos $y - 2 = -3(x-3)$.

b) Pasa por $A(4, 3)$ y tiene por vector director $\overrightarrow{v} = (3, -4)$.

La ecuación **vectorial** se escribe utilizando el punto que tenemos a lo que le sumamos el vector $\overrightarrow{v}$ multiplicado por el parámetro real t. Es decir

$(x, y) = (4, 3) + t(3, -4)$.

Para obtener las ecuaciones **paramétricas** debemos realizar las operaciones del miembro de la derecha de la ecuación vectorial y separar las x por un lado y las y por otro. Escribimos $\left\{ \begin{array}{l} x = 4 + 3t \\ y = 3 - 4t \end{array} \right\}$.

Para obtener la ecuación **continua** despejamos de las paramétricas ambas t e igualamos los resultados. De la primera ecuación tenemos $t = \dfrac{x-4}{3}$; por la segunda ecuación tenemos $t = \dfrac{y-3}{-4}$. Igualando términos tenemos $\dfrac{x-4}{3} = \dfrac{y-3}{-4}$.

Para obtener la ecuación **general** o **implícita** multiplicamos los dos términos de la ecuación continua en cruz. Obtenemos $-4(x-4) = 3(y-3) \Rightarrow -4x + 16 = 3y - 9$. Operamos para dejar todos los términos al mismo lado del igual y tenemos $4x + 3y - 25 = 0$.

Para obtener la ecuación **explícita** despejamos la y.

Obtenemos $y = \dfrac{-4x + 25}{3} = -\dfrac{4}{3}x + \dfrac{25}{3}$.

Por tanto, en particular obtenemos que la pendiente de la recta es $-\dfrac{4}{3}$. Para escribir la ecuación **punto-pendiente** empleamos la fórmula y tenemos $y - 3 = -\dfrac{4}{3}(x - 4)$.

3.4. Matemáticas I (Ejercicios + exámenes) - Probabilidad y estadística y análisis

Ejercicio 3.4 (Crecimiento de una función)

Estudia el crecimiento de las siguientes funciones:

a) $a(x) = x^4 - 4x^2$.

b) $b(x) = x^3 - 3x$.

a) $a(x) = x^4 - 4x^2$.

Para estudiar el crecimiento y decrecimiento, calculamos la derivada:

$a'(x) = 4x^3 - 8x$. Igualando a 0 tenemos $4x^3 - 8x = 0$. Sacando factor común tenemos $4x(x^2 - 2) = 0$. Es decir, $x = 0$ o $x^2 - 2 = 0$. Tomando raíces cuadradas tenemos $x = -\sqrt{2}$ y $x = \sqrt{2}$.

Representamos en la recta real los valores que anulan la derivada:

Intervalo	$\left(-\infty, -\sqrt{2}\right)$	$\left(-\sqrt{2}, 0\right)$	$\left(0, \sqrt{2}\right)$	$\left(\sqrt{2}, \infty\right)$
Signo de a'	$-$	$+$	$-$	$+$
Crecimiento de a	$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$

En el punto de abscisa $x = -\sqrt{2}$ hay un mínimo relativo. El punto es $\left(-\sqrt{2}, -4\right)$.

En el punto de abscisa $x = 0$ hay un máximo relativo. El punto es $(0, 0)$.

En el punto de abscisa $x = \sqrt{2}$ hay un mínimo relativo. El punto es $\left(\sqrt{2}, -4\right)$.

b) $b(x) = x^3 - 3x$.

Para estudiar el crecimiento y decrecimiento, calculamos la derivada:

$b'(x) = 3x^2 - 3$. Igualando a 0 tenemos $3x^2 - 3 = 0$. Pasamos el tres sumando y el coeficiente de x^2 dividiendo; tenemos $x^2 = 1$. Tomando raíces cuadradas tenemos $x = -1$ o $x = 1$.

Representamos en la recta real los valores que anulan la derivada:

Intervalo	$x \in (-\infty, -1)$	$x \in (-1, 1)$	$x \in (1, \infty)$
Signo de b'	$+$	$-$	$+$
Crecimiento de b	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$

En el punto de abscisa $x = -1$ hay un máximo relativo. El punto es $(-1, 2)$.

En el punto de abscisa $x = 1$ hay un mínimo relativo. El punto es $(1, -2)$.

3.5. Matemáticas I (Ejercicios)

Ejercicio 3.5 (Ecuaciones bicuadradas)

Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $x^4 - 5x^2 - 6 = 0$.

b) $x^6 - 9x^3 + 8 = 0$.

c) $x^8 - 17x^4 + 16 = 0$.

a) $x^4 - 5x^2 - 6 = 0$.

Hacemos el cambio de variable $t = x^2$. La ecuación se transforma en $t^2 - 5t - 6 = 0$. Resolvemos $t = \dfrac{5 \pm \sqrt{25 - 4 \cdot (-6)}}{2} = \dfrac{5 \pm 7}{2}$.

Con el signo positivo tenemos $t_1 = 6$. Con el negativo tenemos $t_2 = -1$.

Deshaciendo el cambio de variable, tenemos: $x^2 = 6 \Rightarrow x = \pm\sqrt{6}$ y $x^2 = -1$, que no tiene raíces reales. Por tanto las soluciones reales de la ecuación son $x_1 = \sqrt{6}$ y $x_2 = -\sqrt{6}$.

b) $x^6 - 9x^3 + 8 = 0$.

Hacemos el cambio de variable $t = x^3$. La ecuación se transforma en $t^2 - 9t + 8 = 0$. Resolviendo tenemos que $t = \dfrac{9 \pm \sqrt{81 - 4 \cdot 8}}{2} = \dfrac{9 \pm 7}{2}$.

Con el signo positivo tenemos $t_1 = 8$ y con el negativo tenemos $t_2 = 1$.

Deshaciendo el cambio de variable $x_1 = \sqrt[3]{8} = 2$ y $x_2 = \sqrt[3]{1} = 1$ son las únicas raíces reales de la ecuación.

c) $x^8 - 17x^4 + 16 = 0$.

Hacemos el cambio de variable $t = x^4$.

La ecuación se transforma en $t^2 - 17t + 16 = 0$.

Resolviendo tenemos $t = \dfrac{17 \pm \sqrt{(-17)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 16}}{2} = \dfrac{17 \pm 15}{2}$.

Con el signo positivo tenemos $t_1 = 16$. Con el negativo $t_2 = 1$.

Deshaciendo el cambio de variable tenemos, $x = \pm\sqrt[4]{16} = \pm 2$, por un lado, y, por otro, $x = \pm\sqrt[4]{1} = \pm 1$, que son las soluciones reales de la ecuación.

3.6. Matemáticas I (Exámenes)

Ejercicio de examen 3.1 (Ecuación logarítmica)

(1 punto) Resuelve la siguiente ecuación:

$$\log(x+2) + \log(x+4) = \log(8x+23).$$

Aplicamos las propiedades de los logaritmos para juntar los dos términos de la izquierda bajo un único sumando.

En particular, la suma de logaritmos es el logaritmo del producto:

$\log(x+2)+\log(x+4) = \log(8x+23) \Rightarrow \log((x+2)(x+4)) = \log(23+8x)$.

Operando tenemos $\log(x^2 + 6x + 8) = \log(23 + 8x)$.

Eliminamos los logaritmos $x^2 + 6x + 8 = 23 + 8x$. Pasando todos los términos a la izquierda $x^2 - 2x - 15 = 0$.

Resolviendo la ecuación de segundo grado resultante tenemos:

$x = \dfrac{2 \pm \sqrt{4 + 60}}{2} = \dfrac{2 \pm 8}{2}$.

Con el signo positivo tenemos $x = 5$ y con el negativo tenemos $x = -3$.

Comprobamos si son válidas.

Si sustituimos $x = 5$ en cada logaritmo de la ecuación original tenemos que todos los argumentos resultantes son positivos. Por tanto, la solución es válida.

Si sustituimos $x = -3$ en el primer logaritmo, tenemos $\log(-1)$, que no es un número real.

Por tanto, el valor $x = -3$ no es una solución válida.

Capítulo 4

Matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales.

4.1. Matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales I (Ejercicios + exámenes)

Ejercicio 4.1 (Interpolación cuadrática)

Un instalador de vallas publicitarias ha comprobado que puede ofertar instalaciones de 100 *metros,* 200 *metros y* 300 *metros a* 500 *euros,* 800 *euros y* 900 *euros respectivamente, con un tope de* 300 *metros de longitud. Calcula la parábola que pasa por los tres puntos y determina cuánto costaría una instalación de* 250 *metros.*

Dado que el precio depende de la longitud, la variable dependiente (y) es el precio y la independiente (x) es la longitud. Dado que queremos encontrar la parábola que pasa por (100, 500); (200, 800) y (300, 900) escribimos la ecuación general de la parábola $y = ax^2 + bx + c$ y sustituimos cada punto en esta ecuación. Obtenemos el siguiente sistema:

$$\left\{ \begin{array}{l} 500 = 10000a + 100b + c \\ 800 = 40000a + 200b + c \\ 900 = 90000a + 300b + c \end{array} \right\}.$$

Para resolver el sistema, restamos la primera ecuación a la segunda por un lado y la segunda a la tercera por otro. Obtenemos las siguientes ecuaciones (con a y b como incógnitas): $\left\{ \begin{array}{l} 300 = 30000a + 100b \\ 100 = 50000a + 100b \end{array} \right\}.$

Para eliminar la b de las ecuaciones restamos las dos ecuaciones de este último sistema y obtenemos $200 = -20000a$. Despejando, obtenemos el valor $a = -0'01$.

Despejando en la primera ecuación del segundo sistema tendremos que $300 = -300 + 100b$. Es decir, tenemos $b = 6$. Sustituyendo en la primera ecuación del primer sistema tendremos $500 = 10000(-0'01) + 100 \cdot 6 + c$. Es decir, tenemos $c = 0$.

Por lo tanto, la parábola que pasa por los tres puntos es: $y = -0'01x^2 + 6x$. Sustituyendo x por 250 en esta ecuación obtenemos que el coste estimado es de $y = -0'01 \cdot 250^2 + 6 \cdot 250 = 875$ euros.

4.2. Matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales I (Ejercicios + exámenes) - Números y álgebra

Ejercicio de examen 4.1 (Propiedades de logaritmos)

(2 puntos) Sabiendo que $\log 2 = 0'31$ *y* $\log 3 = 0'48$ *calcula los siguientes logaritmos:*

a) $\log 324$.

b) $\log 25$.

c) $\log \dfrac{15}{2}$.

d) $\log \sqrt{180}$.

a) $\log 324$.

En primer lugar factorizamos $324 = 2^2 \cdot 3^4$. Es decir, podemos escribir el logaritmo buscado de la forma $\log 324 = \log\left(2^2 \cdot 3^4\right)$. Aplicamos las propiedades de los logaritmos (el producto se transforma en suma). Es decir, tenemos $\log 324 = \log 2^2 + \log 3^4$. Bajamos los exponentes delante de los logaritmos $\log 324 = 2\log 2 + 4\log 3$. Sustituyendo y operando tenemos que $\log 324 = 2 \cdot 0'31 + 4 \cdot 0'48 = 0'62 + 1'92 = 2'54$.

b) $\log 25$.

En primer lugar escribimos 25 en forma de fracción para tener todos los valores en función de 10 y de 2. Escribimos $\log 25 = \log \frac{100}{4}$. Aplicando las propiedades de los logaritmos (el cociente se transforma en resta) tenemos $\log 25 = \log 100 - \log 4 = \log 10^2 - \log 2^2$.

Bajando los exponentes tenemos $\log 25 = 2\log 10 - 2\log 2$. Teniendo en cuenta que $\log 10 = 1$ y sustituyendo el valor de $\log 2$ del enunciado tenemos que $\log 25 = 2 - 2 \cdot 0'31 = 1'38$.

c) $\log \frac{15}{2}$.

En primer lugar multiplicamos numerador y denominador por 2 para que en el numerador no aparezca un 5 de factor y tener un 10 en su lugar. Tenemos, $\log \frac{15}{2} = \log \frac{30}{4} = \log \frac{10 \cdot 3}{2^2}$. Aplicamos las propiedades de los logaritmos (los productos (cocientes) se transforman en sumas (restas) y bajamos el cuadrado del denominador): $\log \frac{15}{2} = \log 10 + \log 3 - 2\log 2$.

Sustituimos para obtener que $\log \frac{15}{2} = 1 + 0'48 - 2 \cdot 0'31 = 0'86$.

d) $\log \sqrt{180}$.

Escribimos la raíz en forma de potencia y sacamos el exponente delante del logaritmo $\log\sqrt{180} = \log(180)^{\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{2}\log 180$.

Factorizamos 180 utilizando 10, 2 y 3. Así $\log\sqrt{180} = \dfrac{1}{2}\left(\log\left(10\cdot 2\cdot 3^2\right)\right)$.

Separamos el producto en suma $\log\sqrt{180} = \dfrac{1}{2}\left(\log 10 + \log 3^2 + \log 2\right)$.

Bajamos exponentes y tenemos $\log\sqrt{180} = \dfrac{1}{2}(\log 10 + 2\log 3 + \log 2)$.

Sustituyendo y operando tenemos $\log\sqrt{180} = \dfrac{1}{2}(1 + 0'96 + 0'31) = 1'135$.

4.3. Matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales I (Ejercicios + exámenes) - Análisis

Ejercicio 4.2 (Indeterminaciones $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$)

Calcula los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^4-5}{3x^4+8x^2+5}$.

b) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3x^2+4}{4x^3-4}$.

Tenemos dos métodos para resolver las indeterminaciones tipo $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$. La primera opción es dividir por el término de mayor grado y recordar que

$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^n} = 0$ si $n > 0$. La segunda es quedarnos con los monomios de mayor grado de cada expresión polinómica. Empleamos la primera técnica en el apartado *a*) y la segunda en el *b*).

a) $\lim_{x\to\infty} \frac{x^4-5}{3x^4+8x^2+5}$.

Sustituyendo tenemos $\lim_{x\to\infty} \frac{x^4-5}{3x^4+8x^2+5} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right]$.

Para deshacer la indeterminación dividimos por la x de mayor exponente, en este caso x^4:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^4-5}{3x^4+8x^2+5} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{x^4}{x^4}-\frac{5}{x^4}}{\frac{3x^4}{x^4}+\frac{8x^2}{x^4}+\frac{5}{x^4}}.$$

Dado que $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^n} = 0$, tenemos que el límite es:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^4-5}{3x^4+8x^2+5} = \lim_{x\to\infty} \frac{1-\frac{5}{x^4}}{3+\frac{8}{x^2}+\frac{5}{x^4}} = \frac{1-0}{3+0+0} = \frac{1}{3}.$$

b) $\lim_{x\to\infty} \frac{3x^2+4}{4x^3-4}$.

Sustituyendo tenemos $\lim_{x\to\infty} \frac{3x^2+4}{4x^3-4} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right]$.

Nos quedamos con los términos de mayor grado de numerador y denominador, obteniendo:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{3x^2+4}{4x^3-4} = \lim_{x\to\infty} \frac{3x^2}{4x^3} = \lim_{x\to\infty} \frac{3}{4x} = 0.$$

4.4. Matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales I (Ejercicios + exámenes) - Probabilidad y estadística

Ejercicio 4.3 (Tabla de frecuencias)

Se ha consultado a un grupo de personas su opinión sobre la comida que se sirve en una cadena de restaurantes. Se han obtenido los siguientes resultados: Pésima (590), muy mala (304), mala (590), regular (890), buena (1040), muy buena (1176) y excelente (410). Responde las siguientes cuestiones:

a) *¿Qué tipo de variable estamos estudiando?*

b) *Construye la tabla de frecuencias más completa posible.*

a) ¿Qué tipo de variable estamos estudiando?

Dado que las resultados de la variable no se expresan con número, tenemos que es una variable cualitativa.

b) Construye la tabla de frecuencias más completa posible.

Al ser una variable cualitativa, no tiene sentido hallar las frecuencias acumuladas. En primer lugar calculamos la suma de todas las frecuencias absolutas para poder hallar las frecuencias relativas. Para calcular las frecuencias relativas dividimos las frecuencias absolutas entre en número total de datos.

Opinión	f_i	h_i
Pésima	590	$\frac{590}{5000} = 0'118$
Muy mala	304	$\frac{304}{5000} = 0'0608$
Mala	590	$\frac{590}{5000} = 0'118$
Regular	890	$\frac{890}{5000} = 0'178$
Buena	1040	$\frac{1040}{5000} = 0'208$
Muy buena	1176	$\frac{1176}{5000} = 0'2352$
Excelente	410	$\frac{410}{5000} = 0'082$

Observamos que la suma de todas las frecuencias relativas es 1 (probabilidad del suceso seguro).

4.5. Matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales I (Ejercicios)

Ejercicio 4.4 (Ecuaciones irracionales)

Resuelve las siguientes ecuaciones irracionales:

a) $\sqrt{3x+4}+2x-4=0.$

b) $\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x+1}=0.$

a) $\sqrt{3x+4}+2x-4=0.$

Aislamos la raíz cuadrada para poder elevar ambos términos al cuadrado.

$$\sqrt{3x+4}+2x-4=0 \Rightarrow \sqrt{3x+4}=4-2x \Rightarrow 3x+4=16-16x+4x^2.$$

Al tener términos de grado dos, pasamos todo al segundo miembro:

$4x^2-19x+12=0$. Resolvemos $x=\dfrac{19\pm\sqrt{361-192}}{8}=\dfrac{19\pm 13}{8}$. Es decir, las soluciones de la ecuación de segundo grado son $x=4$ y $x=\dfrac{3}{4}$.

Comprobamos las soluciones:

$x=4$. Sustituimos $\sqrt{12+4}+8-4\stackrel{?}{=}0 \Rightarrow 8\neq 0$. La solución no es válida.

$x=\dfrac{3}{4}$. Sustituimos $\sqrt{\dfrac{9}{4}+4}+\dfrac{3}{2}-4\stackrel{?}{=}0 \Rightarrow 0=0$. La solución sí es válida.

b) $\sqrt{x^2+x} - \sqrt{x+1} = 0$.

Colocamos una raíz a cada lado de la igualdad para poder elevar al cuadrado.

$\sqrt{x^2+x} - \sqrt{x+1} = 0 \Rightarrow \sqrt{x^2+x} = \sqrt{x+1} \Rightarrow x^2+x = x+1$. Pasamos todo al primer miembro $x^2 - 1 = 0$. Resolvemos $x = \pm 1$. Comprobamos las soluciones:

$x = 1$. Sustituimos: $\sqrt{1+1} - \sqrt{1+1} \stackrel{?}{=} 0 \Rightarrow \sqrt{2} - \sqrt{2} = 0$. Sí es válida.

$x = -1$. Sustituimos: $\sqrt{1-1} - \sqrt{-1+1} \stackrel{?}{=} 0 \Rightarrow \sqrt{0} - \sqrt{0} = 0$. Sí es válida.

4.6. Matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales I (Exámenes)

Ejercicio de examen 4.2 (Crecimiento de una función)

(2 puntos) Estudia el crecimiento y extremos relativos de la función $f(x) = \dfrac{x^2+3x+3}{x+2}$.

En primer lugar estudiamos el dominio de la función. Observamos que siendo una función que es cociente de polinomios, su dominio es el conjunto de reales que no anulan al denominador.

Es decir, $\text{Dom}(f) = \{x \in \mathbb{R} | x + 2 \neq 0\}$.

Resolviendo la ecuación asociada tenemos que el valor que no pertenece al dominio es $x = -2$.

Por tanto, tenemos que $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{-2\}$.

Para estudiar el crecimiento de una función, debemos calcular su derivada.

En este caso tenemos $f'(x) = \dfrac{(2x+3)(x+2) - \left(x^2+3x+3\right)1}{(x+2)^2} = \dfrac{x^2+4x+3}{(x+2)^2}$.

Igualando a cero, debemos resolver $x^2 + 4x + 3 = 0$.

Aplicando la fórmula de la ecuación de segundo grado tenemos:

$x = \dfrac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3}}{2 \cdot 1} = \dfrac{-4 \pm 2}{2}$. Con el signo positivo tenemos la raíz $x = -1$ y con el negativo $x = -3$.

Para estudiar el signo de la derivada realizamos la siguiente tabla:

Intervalo	$x \in (-\infty, -3)$	$x \in (-3, -2)$	$x \in (-2, -1)$	$x \in (-1, \infty)$
$x^2 + 4x + 3$	$+$	$-$	$-$	$+$
$(x+2)^2$	$+$	$+$	$+$	$+$
Signo de f'	$+$	$-$	$-$	$+$
Crecimiento de f	$\nearrow$	$\searrow$	$\searrow$	$\nearrow$

Es decir, la función crece si $x \in (-\infty, -3) \cup (-1, \infty)$.

Por otro lado, la función decrece si $x \in (-3, -2) \cup (-2, -1)$. Observamos que en $x = -2$ la función no decrece, ya que no pertenece al intervalo y no se puede escribir que f decrece si $x \in (-3, -1)$.

Estudiamos ahora los extremos relativos:

En el punto con $x = -3$ hay un máximo relativo. Calculamos $f(-3) = -3$. Es decir, f tiene un máximo relativo en el punto $(-3, -3)$.

El valor $x = -2$ no pertenece al dominio. Por tanto, no hay un extremo relativo.

En el punto con $x = -1$ hay un mínimo relativo. Calculamos $f(-1) = 1$. Es decir, f tiene un mínimo relativo en $(-1, 1)$.

Capítulo 5

Matemáticas B (4º ESO).

5.1. Matemáticas B 4º ESO (Ejercicios + exámenes)

Ejercicio 5.1 (Derivada por definición)

Halla la derivada de las siguientes funciones aplicando la definición de derivada:

a) $f(x) = x^3 - 5x + 8.$

b) $f(x) = 4x^2 - 2x.$

a) $f(x) = x^3 - 5x + 8.$

Por la definición tenemos $f'(x) = \lim_{h\to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$.

Sustituyendo las funciones por sus expresiones tenemos

$$\lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^3 - 5(x+h) + 8 - (x^3 - 5x + 8)}{h}.$$

Operando tenemos el límite:

$$\lim_{h\to 0}\frac{x^3+3x^2h+3xh^2+h^3-5x-5h+8-x^3+5x-8}{h}.$$

Operando en el numerador y denominador obtenemos:

$$\lim_{h\to 0}\frac{3x^2h+3xh^2+h^3-5h}{h}=\left[\frac{0}{0}\right].$$

Sacamos factor común en el numerador, simplificamos y volvemos a sustituir:

$$\lim_{h\to 0}\frac{h(3x^2+3xh+h^2-5)}{h}=\lim_{h\to 0}(3x^2+3xh+h^2-5)=3x^2-5.$$

$b)$ $f(x)=4x^2-2x.$

Por la definición tenemos:

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{4(x+h)^2-2(x+h)-(4x^2-2x)}{h}.$$

Operando tenemos:

$$\lim_{h\to 0}\frac{4(x^2+2xh+h^2)-2x-2h-4x^2+2x}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{8xh+4h^2-2h}{h}=\left[\frac{0}{0}\right].$$

Sacamos factor común a h, simplificamos y sustituimos h por 0.

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{h(8x+4h-2)}{h}=\lim_{h\to 0}(8x+4h-2)=8x-2.$$

5.2. Matemáticas B 4º ESO (Ejercicios + exámenes) - Números y álgebra

Ejercicio 5.2 (Operaciones con polinomios)

Simplifica las siguientes expresiones polinómicas:

a) $2(3x-2)^2 - 3(3x+2)^2 - 2(3x-2)(3x+2)$.

b) $\left(2x^2 - 3x + 2\right)\left(-3x^2 + x + 1\right) + (6x - 10)x^3$.

c) $\left(\frac{2}{3}x - \frac{3}{5}\right)\left(\frac{3}{2}x^2 + \frac{2}{5}\right) + \frac{6}{25}$.

a) $2(3x-2)^2 - 3(3x+2)^2 - 2(3x-2)(3x+2)$.

Desarrollamos las identidades notables que tenemos en el enunciado:

$2(9x^2 - 12x + 4) - 3(9x^2 + 12x + 4) - 2(9x^2 - 4)$. Eliminando los paréntesis obtenemos: $18x^2 - 24x + 8 - 27x^2 - 36x - 12 - 18x^2 + 8$.

Sumando términos semejantes tenemos: $-27x^2 - 60x + 4$.

b) $\left(2x^2 - 3x + 2\right)\left(-3x^2 + x + 1\right) + (6x - 10)x^3$.

Eliminando los paréntesis tenemos:

$-6x^4 + 2x^3 + 2x^2 + 9x^3 - 3x^2 - 3x - 6x^2 + 2x + 2 + 6x^4 - 10x^3$.

Sumando los términos semejantes obtenemos: $x^3 - 7x^2 - x + 2$.

c) $\left(\frac{2}{3}x - \frac{3}{5}\right)\left(\frac{3}{2}x^2 + \frac{2}{5}\right) + \frac{6}{25}$.

Multiplicamos los polinomios y obtenemos:

$x^3 + \frac{4}{15}x - \frac{9}{10}x^2 - \frac{6}{25} + \frac{6}{25}$.

Operando los términos semejantes tenemos: $x^3 - \frac{9}{10}x^2 + \frac{4}{15}x$.

5.3. Matemáticas B 4º ESO (Ejercicios + exámenes) - Geometría y probabilidad y estadística

Ejercicio de examen 5.1 (Cálculo razones trigonométricas)
(1 punto) Sabiendo que $\mathrm{sen}(\alpha) = -\frac{3}{5}$ *y que* $180^o < \alpha < 270^o$ *, calcula* $\cos(\alpha)$ *y* $\mathrm{tg}(\alpha)$.

En primer lugar observamos que el ángulo corresponde al tercer cuadrante. Por tanto su seno y su coseno serán negativos, mientras que su tangente será positiva.

Para hallar el coseno aplicamos la Relación Fundamental de la Trigonometría. Es decir $\text{sen}^2(\alpha)+\cos^2(\alpha) = 1$. Sustituyendo: $\left(-\frac{3}{5}\right)^2 + \cos^2(\alpha) = 1$.

Operando tenemos $\frac{9}{25} + \cos^2(\alpha) = 1$.

Pasamos la fracción a la derecha y restamos. Obtenemos: $\cos^2(\alpha) = \frac{16}{25}$.

Tomamos raíces (y recordamos que el coseno es negativo): $\cos(\alpha) = -\frac{4}{5}$.

Por otro lado $\text{tg}(\alpha) = \frac{\text{sen}(\alpha)}{\cos(\alpha)} = \frac{-3/5}{-4/5} = \frac{3}{4}$.

5.4. Matemáticas 4º ESO (Ejercicios + exámenes) - Análisis

Ejercicio de examen 5.2 (Dominio de funciones)

(2 puntos) Estudia el dominio de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \sqrt{1-x^2}$.

b) $g(x) = \frac{1}{\ln(2x+1)}$.

a) $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$.

Dado que es una raíz cuadrada, la expresión de la que tomamos la raíz debe ser no negativo. Por tanto, tenemos $\text{Dom}(f) = \{x \in \mathbb{R} | 1 - x^2 \geq 0\}$.

Para resolver la inecuación polinómica, en primer lugar resolvemos la ecuación asociada.

Tenemos $1 - x^2 = 0$. Resolvemos $x^2 = 1$. Es decir, $x = \pm 1$.

Tomamos valores en cada intervalo generado por las raíces de la ecuación:

Intervalo	$x \in (-\infty, -1)$	$x \in (-1, 1)$	$x \in (1, \infty)$
Signo	-	+	-

Dado que nos interesan los signos positivos, tenemos $\text{Dom}(f) = [-1, 1]$.

b) $g(x) = \dfrac{1}{\ln(2x + 1)}$.

Dado que tenemos una fracción y un logaritmo debemos considerar todos los números que hacen que la expresión del logaritmo sea positiva y además eliminar los que hagan que $\ln(2x + 1)$ sea cero. Es decir, $\text{Dom}(g) = \{x \in \mathbb{R} | 2x + 1 > 0 \text{ y } \ln(2x + 1) \neq 0\}$.

Primero, vemos que $2x + 1 > 0$. Dado que es una inecuación de primer grado, tenemos que despejar la x. Obtenemos $2x > -1 \Rightarrow x > -\dfrac{1}{2}$.

Por otro lado, la igualdad $\ln(2x+1) = 0 \Rightarrow 2x+1 = 1 \Rightarrow x = 0$.

Es decir, un número x está en el dominio si $x > -\dfrac{1}{2}$ y, además, $x \neq 0$.

Es decir, tenemos que $\text{Dom}(g) = \left(-\dfrac{1}{2}, \infty\right) - \{0\} = \left(-\dfrac{1}{2}, 0\right) \cup (0, \infty)$.

5.5. Matemáticas B 4º ESO (Ejercicios)

Ejercicio 5.3 (Posición relativa de rectas)

Halla la posición relativa de los siguientes pares de rectas:

a) $\left\{ \begin{array}{c} r \equiv \{2x + y = 7\} \\ s \equiv \{4x + 2y = 3\} \end{array} \right\}$

b) $\left\{ \begin{array}{c} r \equiv \{2x + y = 6\} \\ s \equiv \{4x - y = 6\} \end{array} \right\}$

c) $\left\{ \begin{array}{c} r \equiv \{y = 2x + 1\} \\ s \equiv \{2y - 4x - 2 = 0\} \end{array} \right\}$

d) $\left\{ \begin{array}{c} r \equiv \{4x + 2y = 8\} \\ s \equiv \{3x + 4y = 11\} \end{array} \right\}$

a) $\left\{\begin{array}{c} r \equiv \{2x + y = 7\} \\ s \equiv \{4x + 2y = 3\} \end{array}\right\}$

En primer lugar escribimos las ecuaciones implícitas de cada recta. La primera es $r \equiv 2x + y - 7 = 0$ y la segunda es $s \equiv 4x + 2y - 3 = 0$. Comprobamos

$$\frac{2}{4} = \frac{1}{2} \neq \frac{-7}{-3}.$$

Por lo tanto, son dos rectas paralelas.

b) $\left\{\begin{array}{c} r \equiv \{2x + y = 6\} \\ s \equiv \{4x - y = 6\} \end{array}\right\}$

Escribimos las ecuaciones implícitas y tenemos $r \equiv 2x + y - 6 = 0$ y $s \equiv 4x - y - 6 = 0$. Comprobamos los ceficientes

$$\frac{2}{4} \neq \frac{1}{-1}.$$

Por lo tanto son rectas secantes.

c) $\left\{\begin{array}{c} r \equiv \{y = 2x + 1\} \\ s \equiv \{2y - 4x - 2 = 0\} \end{array}\right\}$

Hallamos las ecuaciones implícitas. La primera recta es $r \equiv -2x + y - 1 = 0$. La segunda recta es $s \equiv -4x + 2y - 2 = 0$. Hallamos los cocientes:

$$\frac{-2}{-4} = \frac{1}{2} = \frac{-1}{-2}$$

d) $\left\{ \begin{array}{c} r \equiv \{4x + 2y = 8\} \\ s \equiv \{3x + 4y = 11\} \end{array} \right\}$

Hallamos las ecuaciones implícitas. Para la recta $r \equiv 4x + 2y - 8 = 0$. Para la recta $s \equiv 3x + 4y - 11 = 0$. Calculamos la relación entre los coeficientes:

$$\frac{4}{3} \neq \frac{2}{4}.$$

Por lo tanto, las rectas son secantes.

5.6. Matemáticas B 4º ESO (Exámenes)

Ejercicio de examen 5.3 (Problema con raíces)

(1 punto) El área de un rectángulo es 15 *metros cuadrados. Si su altura del rectángulo mide* $\sqrt{18} - \sqrt{12}$ *metros, ¿cuánto mide su base? Racionaliza y extrae factores del resultado.*

En primer lugar recordamos que el área de un rectángulo se obtiene multiplicando su base y su altura. Por tanto, la base se obtiene dividiendo el área del rectángulo entre la altura. Tenemos que:

$$b = \frac{15}{\sqrt{18} - \sqrt{12}}.$$

Debemos racionalizar el resultado. Para ello multiplicamos numerador y denominador por el conjugado del denominador. Obtenemos que:

$$b = \frac{15}{\sqrt{18} - \sqrt{12}} \cdot \frac{\sqrt{18} + \sqrt{12}}{\sqrt{18} + \sqrt{12}}.$$

Multiplicando obtenemos en el denominador una identidad notable. En el numerador no multiplicamos de momento. Tenemos:

$$b = \frac{15\left(\sqrt{18} + \sqrt{12}\right)}{\left(\sqrt{18}\right)^2 - \left(\sqrt{12}\right)^2}.$$

Operando tenemos:

$$b = \frac{15\left(\sqrt{18} + \sqrt{12}\right)}{18 - 12} = \frac{15\left(\sqrt{18} + \sqrt{12}\right)}{6}.$$

Simplificando entre 3 numerador y denominador tenemos:

$$b = \frac{5\left(\sqrt{18} + \sqrt{12}\right)}{2}.$$

Ahora debemos extraer factores. Para ello, factorizamos cada radicando $18 = 2 \cdot 3^2$ y $12 = 2^2 \cdot 3$.

Obtenemos $b = \dfrac{5\left(\sqrt{2 \cdot 3^2} + \sqrt{2^2 \cdot 3}\right)}{2}$.

Extraemos los factores que están elevados al cuadrado obteniendo:

$$b = \frac{5\left(3\sqrt{2} + 2\sqrt{3}\right)}{2} = \frac{15\sqrt{2} + 10\sqrt{3}}{2}.$$

Es decir, la base mide $\dfrac{15\sqrt{2} + 10\sqrt{3}}{2}$ metros.

Capítulo 6

Matemáticas A (4º ESO).

6.1. Matemáticas A 4º ESO (Ejercicios + exámenes)

Ejercicio de examen 6.1 (Problema con sistemas de ecuaciones)
(2 puntos) Dos personas realizan una apuesta de 20 *euros cada una. Si la primera persona gana, tendrá el triple del dinero que tendrá la segunda. Si gana la segunda, entonces ambas personas tendrán el mismo dinero. ¿Cuánto dinero tenía cada uno antes de realizar la apuesta?*

Llamamos *x=dinero de la primera persona* e *y=dinero de la segunda persona*.

Si la primera persona gana, tendrá su dinero inicial más los 20 ganados $(x + 20)$; mientras que la segunda tendrá su cantidad inicial menos los 20 euros ($y - 20$).

Ahora la cantidad $x + 20$ es el triple que la cantidad $y - 20$. Por tanto, la primera ecuación es $x + 20 = 3(y - 20)$. Eliminando paréntesis tenemos la ecuación $x - 3y = -80$.

Si la segunda persona gana, tendrá su dinero inicial más los 20 que gana. Es decir, tendría $y+20$. Por otro lado, el primero tendría los iniciales menos los 20 que pierde.

En consecuencia, tendría $x - 20$. Según el enunciado estas cantidades son iguales.

Por lo tanto, la segunda ecuación es $x - 20 = y + 20$. Esta ecuación es equivalente a $-x + y = -40$.

Debemos resolver el sistema: $\left\{ \begin{array}{c} x - 3y = -80 \\ -x + y = -40 \end{array} \right\}$.

Sumando las dos ecuaciones tenemos $-2y = -120$. Dividiendo entre -2, tenemos $y = 60$. Sustituyendo en la segunda ecuación del sistema tenemos $x = 100$.

Es decir, la primera persona tenía 100 euros y la segunda tenía 60 euros.

6.2. Matemáticas A 4º ESO (Ejercicios + exámenes) - Números y álgebra

Ejercicio 6.1 (Extracción de factores de radicales)

Extrae del radical todos los factores que sea posible:

a) $\sqrt[3]{128x^5}$.

b) $\sqrt[3]{243a^5b^3c^2}$.

c) $\sqrt[5]{64y^8}$.

a) $\sqrt[3]{128x^5}$.

Lo primero que debemos hacer es factorizar el radicando. En este caso queda $\sqrt[3]{128x^5} = \sqrt[3]{2^7x^5}$. A continuación dividimos el exponente de cada factor entre el índice de la raíz. El cociente es el exponente que sale fuera de la raíz, y el resto es el exponente que se queda dentro. En este caso:

$$\sqrt[3]{2^7x^5} = 2^2x\sqrt[3]{2x^2} = 4x\sqrt[3]{2x^2}.$$

b) $\sqrt[3]{243a^5b^3c^2}$.

Lo primero que debemos hacer es factorizar el radicando. En este caso queda $\sqrt[3]{243a^5b^3c^2} = \sqrt[3]{3^5a^5b^3c^2}$.

A continuación dividimos el exponente de cada factor entre el índice de la raíz. El cociente es el exponente que sale fuera de la raíz, y el resto es el exponente que se queda dentro.

En este caso observamos que no es posible extraer el factor c, puesto que su exponente es menor que el índice de la raíz. También observamos que el factor b sale por completo de la raíz, al ser su exponente un múltiplo del índice de la raíz. Hechas estas consideraciones, se obtiene que:

$\sqrt[3]{3^5a^5b^3c^2} = \sqrt[3]{3^5a^5b^3c^2} = 3ab\sqrt[3]{3^2a^2c^2}$.

c) $\sqrt[5]{64y^8}$.

Lo primero que debemos hacer es factorizar el radicando. En este caso queda $\sqrt[5]{64y^8} = \sqrt[5]{2^6y^8}$. A continuación dividimos el exponente de cada factor entre el índice de la raíz. El cociente es el exponente que sale fuera de la raíz, y el resto es el exponente que se queda dentro. En este caso:

$\sqrt[5]{2^6y^8} = 2y\sqrt[5]{2y^3}$

6.3. Matemáticas A 4º ESO (Ejercicios + exámenes) - Geometría y funciones

Ejercicio de examen 6.2 (Función inversa)

(1 punto) Calcula la función inversa de $f(x) = 3x^2 + 2$.

En primer lugar, sustituimos $f(x)$ por y, obteniendo $y = 3x^2 + 2$. Posteriormente, procedemos a despejar la x.

Tenemos $y = 3x^2 + 2$.

Pasando el 2 restando tenemos $y - 2 = 3x^2$.

Pasamos el 3 dividiendo $x^2 = \dfrac{y-2}{3}$.

Por último, tomamos raíces cuadradas a ambos lados, obteniendo la igualdad $x = \sqrt{\dfrac{y-2}{3}}$.

Ahora cambiamos x por $f^{-1}(x)$ y la y por x.

Es decir, $f^{-1}(x) = \sqrt{\dfrac{x-2}{3}}$.

6.4. Matemáticas A 4º ESO (Ejercicios + exámenes) - Probabilidad y estadística

Ejercicio de examen 6.3 (Estadística)

Hemos apuntado las veces que han ido 50 personas al cine en el último año obteniendo los siguientes resultados:

1	3	2	4	1	0	2	0	3	1
5	3	1	5	2	1	3	1	5	1
2	0	3	1	5	0	4	1	2	2
4	5	2	1	3	2	1	5	4	5
2	3	1	2	4	3	5	5	3	2

a) (1 punto) Escribe la tabla de frecuencias completa.

b) (1 punto) Calcula la media.

c) (1 punto) Calcula la desviación típica.

a) Escribe la tabla de frecuencias completa.

En primer lugar observamos que la variable que estamos estudiando es una variable cuantitativa (discreta). Por tanto tiene sentido calcular frecuencias acumuladas.

Contamos cuántas veces se repite cada valor. Tenemos cuatro ceros, doce unos, once doses, nueve treses, cinco cuatros y nueve cincos.

Podemos ya escribir la tabla de frecuencias:

x_i	f_i	h_i	F_i	H_i	$x_i \cdot f_i$	$x_i^2 \cdot f_i$
0	4	$\frac{4}{50} = 0'08$	4	$0'08$	0	0
1	12	$\frac{12}{50} = 0'24$	16	$0'32$	12	12
2	11	$\frac{11}{50} = 0'22$	27	$0'54$	22	44
3	9	$\frac{9}{50} = 0'18$	36	$0'72$	27	81
4	5	$\frac{5}{50} = 0'10$	41	$0'82$	20	80
5	9	$\frac{9}{50} = 0'18$	50	1	45	225
					$\sum x_i \cdot f_i = 126$	$\sum x_i^2 \cdot f_i = 442$

b) Calcula la media.

Para calcular la media utilizamos la fórmula $\overline{x} = \frac{\sum x_i \cdot f_i}{N} = \frac{126}{50} = 2'52$.

c) Calcula la desviación típica.

En primer lugar calculamos la varianza. Para ello utilizamos la fórmula $s^2 = \frac{\sum x_i^2 \cdot f_i}{N} - \overline{x}^2 = \frac{442}{50} - 2'52^2 = 2'4896.$

Ahora, la desviación típica es la raíz cuadrada de la varianza.

Es decir, tenemos $\sigma = \sqrt{2'4896} = 1'5778.$

6.5. Matemáticas A 4º ESO (Ejercicios)

Ejercicio 6.2 (Sistemas no lineales - polinómicas)

Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones no lineales:

$a)$ $\left\{\begin{array}{c} y = 4 - x \\ x^2 + y^2 = 8 \end{array}\right\}.$

$b)$ $\left\{\begin{array}{c} 3x^2 - y^2 = 12 \\ (x-1)^2 + y^2 = 9 \end{array}\right\}.$

$a)$ $\left\{\begin{array}{c} y = 4 - x \\ x^2 + y^2 = 8 \end{array}\right\}.$

Sustituimos la y de la primera ecuación en la segunda y operamos para resolver la ecuación de segundo grado resultante:

$$x^2 + (4-x)^2 = 8 \Rightarrow x^2 + 16 + x^2 - 8x - 8 = 0 \Rightarrow 2x^2 - 8x + 8 = 0.$$

Simplificando por 2 tenemos $x^2 - 4x + 4 = 0 \Rightarrow (x-2)^2 = 0$. La única solución es $x = 2$. Sustituimos en la primera ecuación y obtenemos $y = 2$. La única solución es $(x, y) = (2, 2)$.

Gráficamente, la primera ecuación es una recta y la segunda una circunferencia. El hecho de que tengan únicamente un punto en común se debe a que son tangentes en el punto $(2, 2)$.

b) $\left\{ \begin{array}{c} 3x^2 - y^2 = 12 \\ (x-1)^2 + y^2 = 9 \end{array} \right\}$.

Resolvemos este sistema por reducción. Para ello, vamos a sumar las dos ecuaciones:

$3x^2 + (x-1)^2 = 21$. Operando tenemos $4x^2 - 2x - 20 = 0$. Resolvemos la ecuación de segundo grado: $x = \dfrac{2 \pm \sqrt{4 + 320}}{8}$. Es decir, las soluciones son $x = \dfrac{5}{2}$ y $x = -2$. Sustituimos en la primera ecuación cada una de las x para obtener las y correspondientes.

Si $x = \dfrac{5}{2}$, tenemos $3\left(\dfrac{5}{2}\right)^2 - y^2 = 12$. Operando tenemos $\dfrac{75}{4} - y^2 = 12$. Es decir, $y^2 = \dfrac{27}{4}$. Por tanto, $y = \pm\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$.

Si $x = -2$, tenemos $3(-2)^2 - y^2 = 12 \Rightarrow 12 - y^2 = 12 \Rightarrow y^2 = 0 \Rightarrow y = 0$.

Por tanto, tenemos las soluciones $(x, y) = \left(\dfrac{5}{2}, \dfrac{3\sqrt{3}}{2}\right)$, $(x, y) = \left(\dfrac{5}{2}, -\dfrac{3\sqrt{3}}{2}\right)$

y $(x, y) = (-2, 0)$.

En este caso la primera ecuación es una hipérbola y la segunda una circunferencia de radio 3 centrada en el punto $(1, 0)$.

6.6. Matemáticas A 4º ESO (Exámenes)

Ejercicio de examen 6.4 (Volumen de un cilindro)

(1 punto) Halla el volumen, el área lateral y el área total de un cilindro cuya base mide 5 centímetros de radio y cuya altura es 8 centímetros.

Para hallar el volumen y el área total vamos a necesitar previamente el área de la base. Dado que la base es un círculo, su área es $\pi \cdot r^2$. Tenemos por tanto que Área$_b = \pi \cdot 5^2 = 25\pi$ centímetros cuadrados.

Calculamos el volumen. Recordamos que Vol=Área$_b \cdot h = 25\pi \cdot 8 = 200\pi$ centímetros cúbicos.

Para calcular el área lateral del cilindro, necesitamos la longitud de la base. Dado que es una circunferencia, tenemos que Long$_b = 2{\cdot}\pi{\cdot}r = 2{\cdot}\pi{\cdot}5 = 10\pi$ centímetros.

El área lateral es Área$_l$ =Long$_b \cdot h = 10\pi \cdot 8 = 80\pi$ centímetros cuadrados.

Por último, el área total es el área lateral más dos veces el área de la base.

Es decir, $\text{Área}_t = 80\pi + 2 \cdot 25\pi = 130\pi$ centímetros cuadrados.

Capítulo 7

Matemáticas 3º ESO.

7.1. Matemáticas 3º ESO (Ejercicios + exámenes)

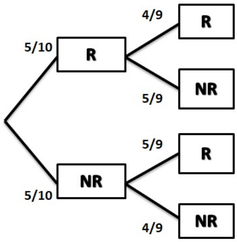
Ejercicio de examen 7.1 (Probabilidad - Experimento compuesto) *En una bolsa tenemos 5 bolas rojas, 3 azules y dos verdes. Calcula la probabilidad de que al extraer dos bolas sin reemplazamiento:*

a) *(1 punto) Las dos bolas sean rojas.*

b) *(1 punto) La segunda bola sea roja.*

a) Las dos bolas sean rojas.

En primer lugar observamos que es más cómodo agrupar los sucesos *ser azul* y *ser verde* en el suceso *no ser rojo*. Para la primera extracción tenemos 10 bolas, 5 de ellas son rojas y las otras cinco no. Por tanto, en la primera extracción el suceso ser bola roja tiene cinco casos favorables de diez posibles.



Utilizando la Regla de Laplace tenemos $P(R) = \frac{5}{10}$. Para la segunda extracción tenemos dos posibilidades. Si la primera bola ha sido roja, tendremos 4 bolas rojas y cinco de otros colores. Por tanto, la probabilidad de que sea roja será $\frac{4}{9}$. De manera análoga la probabilidad de que no sea roja será de $\frac{5}{9}$. Si la primera no ha sido roja, para la segunda extracción quedarán 5 bolas rojas y cuatro de otros colores. Por tanto, la probabilidad de que sea roja en este caso es $\frac{5}{9}$ y de que no sea roja $\frac{4}{9}$. Ahora la probabilidad de que las dos bolas sean rojas es el producto de las dos probabilidades que están en la primera rama. Es decir, $P(\text{Dos rojas}) = \frac{5}{10} \cdot \frac{4}{9} = \frac{20}{90} = 0,22$.

b) La segunda bola sea roja.

En este caso, tenemos dos ramas válidas, la primera y la tercera. Para calcular la probabilidad de cada rama, multiplicamos las dos fracciones de cada rama y después sumamos los resultados.

Es decir, tenemos $P(\text{Segunda roja}) = \frac{5}{10} \cdot \frac{4}{9} + \frac{5}{10} \cdot \frac{5}{9} = \frac{45}{90} = 0,5$.

7.2. Matemáticas 3º ESO (Ejercicios + exámenes) - Números y álgebra

Ejercicio 7.1 (Fracción generatriz)

Escribe la fracción generatriz (simplificada) de los siguientes números decimales:

a) $F = 0,425$.

b) $G = 2,7\widehat{52}$.

c) $H = 4,\widehat{85}$.

d) $G = 5,2\widehat{9}$.

e) $H = 1,\widehat{9}$.

a) $F = 0,425$.

F es un número decimal exacto, por lo tanto para obtener su fracción generatriz procedemos de la siguiente forma: En el numerador colocamos el número sin la coma, y en el denominador colocamos la unidad seguida de tantos ceros como cifras decimales tiene el número. Después simplificamos. En este caso:

$F = \dfrac{425}{1000} = \dfrac{17}{40}$.

b) $G = 2,7\widehat{52}$.

G es un decimal periódico mixto,de anteperíodo 7 (una cifra decimal) y período 52 (dos cifras decimales). Por tanto, debemos multiplicarlo primero por 1000 (para mover la coma tres lugares hacia la derecha y saltar el anteperíodo y un período) y luego por 10 (para mover la coma un lugar hacia la derecha y saltar el anteperíodo). Así, nos queda:

$$\begin{array}{rcr} 1000G & = & 2752,\widehat{52} \\ 10G & = & 27,\widehat{52} \\ \hline 990G & = & 2725 \end{array}$$

Es decir, $G = \dfrac{2725}{990} = \dfrac{545}{198}$.

c) $H = 4,\widehat{85}$.

H es un decimal periódico puro,de período 85 (dos cifras decimales). Por tanto, debemos multiplicarlo por 100 (para mover la coma dos lugares hacia la derecha y saltar el período). Así, nos queda:

$$\begin{array}{rcr} 100H & = & 485,\widehat{85} \\ H & = & 4,\widehat{85} \\ \hline 99H & = & 481 \end{array}$$

Es decir, $H = \dfrac{481}{99}$.

d) $G = 5,2\widehat{9}$.

G es un decimal periódico mixto,de anteperíodo 2 (una cifra decimal) y período 9 (una cifra decimal). Por tanto, debemos multiplicarlo primero por 100 (para mover la coma dos lugares hacia la derecha y saltar el anteperíodo y un período) y luego por 10 (para mover la coma un lugar hacia la derecha y saltar el anteperíodo). Así, nos queda:

$$\begin{array}{rcr} 100G & = & 529,\widehat{9} \\ 10G & = & 52,\widehat{9} \\ \hline 90G & = & 477 \end{array}$$

Es decir, $G = \dfrac{477}{90} = \dfrac{53}{10}$.

e) $H = 1,\widehat{9}$.

H es un decimal periódico puro,de período 9 (una cifra decimal). Por tanto, debemos multiplicarlo por 10 (para mover la coma un lugar hacia la derecha y saltar el período). Así, nos queda:

$$\begin{array}{rcr} 10H & = & 19,\widehat{9} \\ H & = & 1,\widehat{9} \\ \hline 9H & = & 18 \end{array}$$

Es decir, $H = \dfrac{18}{9} = 2$

Observamos que $\dfrac{18}{9} = 2$, ¿Qué ha pasado? Muy sencillo,el período es 9, y al calcular la fracción generatriz de un número decimal periódico de período 9 se obtiene una fracción cuyo cociente indicado es un decimal exacto (o un número entero).

7.3. Matemáticas 3º ESO (Ejercicios + exámenes) - Funciones

Ejercicio de examen 7.2 (Sucesiones- progresiones aritméticas)

(2 puntos) Consideramos los términos $a_3 = 23$ y $a_8 = 58$ de una progresión aritmética. Calcula el primer término, la diferencia, el vigésimo término, la suma de los 20 primeros términos y qué posición ocupa el número 79.

En primer lugar recordamos que el término general de una progresión aritmética es $a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$.

Dado que tenemos dos términos de la progresión, vamos a sustituir la n por los valores 3 y 8 (ya que tenemos el tercer y el octavo término). Con

$n = 3$ tenemos la ecuación $a_3 = a_1 + (3-1)\cdot d$. Sustituyendo tenemos $23 = a_1 + 2d$. De manera análoga, sustituyendo $n = 8$ tenemos que $a_8 = a_1 + (8-1)\cdot d$. Es decir, tenemos $58 = a_1 + 7d$. Es decir, tenemos el sistema $\left\{\begin{array}{c} 23 = a_1 + 2d \\ 58 = a_1 + 7d \end{array}\right\}$. Restando ambas ecuaciones obtenemos $-35 = -5d$. Pasamos el -5 al primer miembro dividiendo y obtenemos que la diferencia es $d = 7$.

Ahora, para obtener el primer término, sustituimos el valor calculado en una de las ecuaciones, obteniendo $23 = a_1 + 2\cdot 7$. Operando tenemos $23 = a_1 + 14$. Restando el 14 a la izquierda tenemos $a_1 = 9$.

Por tanto, el término general es $a_n = 9 + (n-1)\cdot 7 = 7\cdot n + 2$. El término general no nos lo piden, pero nos sirve para operar de manera más rápida en las siguientes preguntas.

El vigésimo término se obtiene sustituyendo $n = 20$ en la fórmula del término general. Es decir, $a_{20} = 7\cdot 20 + 2 = 142$.

Para hallar la suma de los n primeros términos utilizamos la fórmula correspondiente $S_n = \frac{a_1 + a_n}{2}\cdot n$.

Sustituyendo tenemos $S_{20} = \frac{a_1 + a_{20}}{2}\cdot 20 = \frac{9 + 142}{2}\cdot 20 = 1510$.

Por último, para calcular qué posición ocupa el término 79, sustituimos en la fórmula del término general para resolver la ecuación $79 = 7\cdot n + 2$.

Pasamos el 2 restando, obteniendo $77 = 7 \cdot n$ y el 7 dividiendo obteniendo $n = 11$. Es decir, el número 79 ocupa la undécima posición.

7.4. Matemáticas 3º ESO (Ejercicios + exámenes) - Probabilidad y estadística y geometría

Ejercicio de examen 7.3 (Tabla de frecuencias - datos agrupados)

Hemos medido la altura de 100 *animales, obteniendo los valores:*

Intervalo	$[10, 16)$	$[16, 22)$	$[22, 28)$	$[28, 34)$	$[34, 40)$	$[40, 46)$
Animales	15	18	20	15	17	15

Se pide:

a) *(0,75 puntos) Realiza una tabla de frecuencias completa.*

b) *(0,75 puntos) Realiza un histograma.*

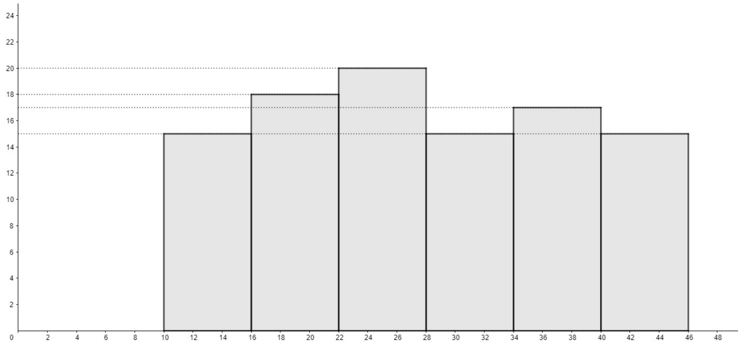
a) Realiza una tabla de frecuencias completa.

Al tratarse de una variable aleatroia cuantitativa, tiene sentido calcular las frecuencias acumuladas. Además debemos añadir la columna marca de clase (en la tabla la denotamos como MDC), que es la media del extremo inferior y del extremo superior de cada intervalo y es el valor que utilizamos como x_i.

Int.	MDC	f_i	h_i	F_i	H_i	$x_i \cdot f_i$	$x_i^2 \cdot f_i$
$[10, 16)$	13	15	$0,15$	15	$0,12$	195	2535
$[16, 22)$	19	18	$0,18$	33	$0,44$	342	6498
$[22, 28)$	25	20	$0,20$	53	$0,68$	500	12500
$[28, 34)$	31	15	$0,15$	68	$0,86$	465	14415
$[34, 40)$	37	17	$0,17$	85	$0,94$	629	23273
$[40, 46)$	43	15	$0,15$	100	1	645	27735
						$\sum x_i \cdot f_i = 2776$	$\sum x_i^2 \cdot f_i = 86956$

b) Realiza un histograma.

Para realizar el histograma, debemos tener en cuenta que la base de las barras verticales son los valores correspondientes a los intervalos del enunciado. La altura de cada barra es la frecuencia absoluta correspondiente.



7.5. Matemáticas 3º ESO (Ejercicios)

Ejercicio 7.2 (Operaciones con radicales)

Realiza las siguientes operaciones con radicales:

a) $-15\sqrt{7}+4\sqrt{700}-4\sqrt{2}+6\sqrt{200}$.

b) $4\sqrt{5}-9\sqrt{125}+\dfrac{5}{2}\sqrt{500}-2\sqrt{405}+\dfrac{7}{3}\sqrt{5}-\dfrac{5}{4}\sqrt{20}$.

c) $\dfrac{3}{4}\sqrt[3]{16}-4\sqrt[3]{2}+\dfrac{7}{12}\sqrt[3]{128}-2\sqrt[3]{\dfrac{2}{27}}$.

a) $-15\sqrt{7}+4\sqrt{700}-4\sqrt{2}+6\sqrt{200}$.

Lo primero que debemos hacer es descomponer factorialmente los radicandos. En este caso nos queda: $-15\sqrt{7}+4\sqrt{2^2\cdot 5^2\cdot 7}-4\sqrt{2}+6\sqrt{2^3\cdot 5^2}$.

Posteriormente, debemos extraer todos los factores posibles de los radicandos, en este caso: $-15\sqrt{7} + 4 \cdot 2 \cdot 5\sqrt{7} - 4\sqrt{2} + 6 \cdot 2 \cdot 5\sqrt{2}$.

Realizando las multiplicaciones nos queda:

$-15\sqrt{7} + 40\sqrt{7} - 4\sqrt{2} + 60\sqrt{2}$.

Por último operamos los radicales semejantes: $25\sqrt{7} + 56\sqrt{2}$.

b) $4\sqrt{5} - 9\sqrt{125} + \frac{5}{2}\sqrt{500} - 2\sqrt{405} + \frac{7}{3}\sqrt{5} - \frac{5}{4}\sqrt{20}$.

Lo primero que debemos hacer es descomponer factorialmente los radicandos. En este caso nos queda:

$4\sqrt{5} - 9\sqrt{5^3} + \frac{5}{2}\sqrt{2^2 \cdot 5^3} - 2\sqrt{3^4 \cdot 5} + \frac{7}{3}\sqrt{5} - \frac{5}{4}\sqrt{2^2 \cdot 5}$.

Posteriormente, debemos extraer todos los factores posibles de los radicandos, en este caso:

$4\sqrt{5} - 9 \cdot 5\sqrt{5} + \frac{5}{2} \cdot 2 \cdot 5\sqrt{5} - 2 \cdot 3^2\sqrt{5} + \frac{7}{3}\sqrt{5} - \frac{5}{4} \cdot 2\sqrt{5}$.

Realizando las multiplicaciones nos queda:

$4\sqrt{5} - 45\sqrt{5} + 25\sqrt{5} - 18\sqrt{5} + \frac{7}{3}\sqrt{5} - \frac{5}{2}\sqrt{5}$.

Por último operamos los radicales semejantes,en este caso todos, y el resultado final es: $-\frac{205}{6}\sqrt{5}$.

c) $\frac{3}{4}\sqrt[3]{16} - 4\sqrt[3]{2} + \frac{7}{12}\sqrt[3]{128} - 2\sqrt[3]{\frac{2}{27}}$.

Lo primero que debemos hacer es descomponer factorialmente los radicandos. En este caso nos queda: $\frac{3}{4}\sqrt[3]{2^4} - 4\sqrt[3]{2} + \frac{7}{12}\sqrt[3]{2^7} - 2\sqrt[3]{\frac{2}{3^3}}$.

Posteriormente, debemos extraer todos los factores posibles de los radicandos, en este caso: $\frac{3}{4} \cdot 2\sqrt[3]{2} - 4\sqrt[3]{2} + \frac{7}{12} \cdot 2^2\sqrt[3]{2} - 2 \cdot \frac{1}{3}\sqrt[3]{2}$.

Realizando las multiplicaciones nos queda: $\frac{3}{2}\sqrt[3]{2} - 4\sqrt[3]{2} + \frac{7}{3}\sqrt[3]{2} - \frac{2}{3}\sqrt[3]{2}$.

Por último operamos los radicales semejantes, en este caso todos, y el resultado final es: $-\frac{5}{6}\sqrt[3]{2}$.

7.6. Matemáticas 3º ESO (Exámenes)

Ejercicio de examen 7.4 (Factorización de polinomios)

Dado el polinomio $P(x) = 10x^5 + 41x^4 + 36x^3 + 9x^2$.

a) *(0.5 puntos) Resuelve la ecuación* $P(x) = 0$.

b) *(0.5 puntos) Factoriza* $P(x)$.

Vamos a resolver ambos apartados a la vez. En primer lugar, extraemos factor común x^2. Obtenemos que $P(x) = x^2(10x^3 + 41x^2 + 36x + 9)$.

Para seguir factorizando, vamos a probar con la Regla de Ruffini. Las posibles raíces enteras son ± 1, ± 3 y ± 9. Obtenemos que -3 es raíz (podemos observar que cumple las condiciones del Teorema del factor- es decir, $P(-3) = 0$). Dividiendo, mediante Ruffini obtenemos:

$$\begin{array}{r|rrrr} & 10 & 41 & 36 & 9 \\ -3 & & -30 & -33 & -9 \\ \hline & 10 & 11 & 3 & \boxed{0} \end{array}$$

Resolvemos ahora la ecuación de segundo grado $10x^2 + 11x + 3 = 0$. Obtenemos las soluciones $x = \dfrac{-11 \pm \sqrt{121 - 4 \cdot 10 \cdot 3}}{20} = \dfrac{-11 \pm 1}{20}$. Es decir, tenemos las soluciones $x = -\dfrac{1}{2}$ y $x = -\dfrac{3}{5}$.

Es decir, podemos factorizar $P(x) = 10x^2(x+3)\left(x + \dfrac{1}{2}\right)\left(x + \dfrac{3}{5}\right)$. Podemos factorizar el $10 = 2 \cdot 5$ y multiplicar el 2 por el segundo paréntesis y el 5 por el tercero, obteniendo $P(x) = x^2(x + 3)(2x + 1)(5x + 3)$.

Por otro lado escribimos las raíces. Tenemos que el factor x^2 quiere decir que la raíz $x = 0$ es doble.

Por tanto, las raíces son $x_1 = x_2 = 0$, $x_3 = -3$, $x_4 = -\dfrac{1}{2}$ y $x_5 = -\dfrac{3}{5}$.

Capítulo 8

Matemáticas 2º ESO.

8.1. Matemáticas 2º ESO (Ejercicios + exámenes)

Ejercicio de examen 8.1 (Proporcionalidad compuesta)
Para alimentar a 15 *familias durante* 8 *días necesitamos* 300 *kg de comida. Responde a las siguientes cuestiones:*

a) *(1 punto) ¿Cuánta comida necesitaremos para alimentar a* 10 *familias durante* 12 *días?*

b) *(1 punto) ¿Cuántos días podremos alimentar a* 10 *familias con* 250 *kg de comida?*

a) ¿Cuánta comida necesitaremos para alimentar a 10 familias durante 12 días?

Observamos que nos preguntan por la magnitud comida. Por tanto, la ponemos la primera.

Comida	Familias	Días
300	15	8
x	10	12

Ahora comprobamos qué tipo de proporcionalidad tienen la segunda y tercera columnas respecto de la primera. Nos preguntamos:

Fijando el tiempo. Con más comida, se alimentan ¿más o menos familias? Se alimentan más. Por tanto, las magnitudes comida y familias son directamente proporcionales.

Fijando el número de familias. Con más comida, se alimentan ¿más o menos días? Se alimentan más. Por tanto, las magnitudes comida y días son directamente proporcionales.

Ahora resolvemos. La primera fracción la dejamos como está y ponemos un =. Ahora como la primera y segunda magnitudes son directamente proporcionales, dejamos la fracción $\frac{15}{10}$ como está. Por último multiplicamos por la última fracción como está (dado que las magnitudes comida y días son directamente proporcionales.

Debemos resolver $\frac{300}{x} = \frac{15}{10} \cdot \frac{8}{12} = \frac{15 \cdot 8}{10 \cdot 12}$. Resolviendo la regla de tres tenemos que $x = \dfrac{300 \cdot 10 \cdot 12}{15 \cdot 8} = 300$. Es decir, necesitaremos 300 kg de comida.

b) ¿Cuántos días podremos alimentar a 10 familias con 250 kg de comida?

En este apartado nos preguntan por la magnitud días. Por tanto, la ponemos la primera.

Días	Comida	Familias
8	300	15
x	250	10

Ahora comprobamos qué tipo de proporcionalidad tienen las magnitudes comida y familias respecto de días.

Dejando el número de familias fijo. Para alimentarlas durante más días, ¿necesitamos más o menos comida? Más comida. Por tanto, las magnitudes días y comida son directamente proporcionales.

Con una cantidad fija de comida. Si queremos que nos dure más días, ¿podemos alimentar a más o a menos familias? Menos. Por tanto, las magnitudes días y familias son inversamente proporcionales.

Ahora resolvemos. La primera fracción se queda igual, seguida de un =. La segunda también la dejamos igual, porque las magnitudes correspondientes son directamnete proporcionales. Multiplicamos por la segunda fracción invertida, dado que las magnitudes correspondientes son inversamente proporcionales.

Tenemos $\frac{8}{x} = \frac{300}{250} \cdot \frac{10}{15}$. Es decir, tenemos $x = \frac{8 \cdot 250 \cdot 15}{10 \cdot 300} = 10$. Es decir, se podrán alimentar durante 10 días.

8.2. Matemáticas 2º ESO (Ejercicios + exámenes) - Números

Ejercicio 8.1 (Operaciones combinadas con enteros)

Efectúa las siguientes operaciones combinadas:

a) $[5 + 2 \cdot 7 + 1] : (6 - 2 \cdot 5)$.

b) $((-2) \cdot (-3) + 14 : (-7)) \cdot 4 - 3$.

c) $(-3) + 2 \cdot (4 + 2 \cdot 5) - 15 \cdot 2$.

d) $(-100) + (200) - (-150) + (-3) \cdot (50)$.

a) $[5 + 2 \cdot 7 + 1] : (6 - 2 \cdot 5)$.

En primer lugar debemos realizar las operaciones que hay dentro del paréntesis y del corchete. Dentro de cada símbolo, empezamos por los productos. Obtenemos: $[5+2\cdot 7+1] : (6-2\cdot 5) = [5+14+1] : (6-10)$. Ahora en el corchete realizamos las dos sumas (de izquierda a derecha) y en el paréntesis realizamos la resta. Obtenemos $[5 + 14 + 1] : (6 - 10) = [20] : (-4)$. Por último realizamos el cociente: $20 : (-4) = -5$.

b) $((-2) \cdot (-3) + 14 : (-7)) \cdot 4 - 3$.

En primer lugar debemos efectuar las operaciones que están en el paréntesis que empieza antes del -2 y termina después del -7. Dentro de ese paréntesis, empezamos por el producto y por el cociente (separados por un +). Obtenemos: $((-2) \cdot (-3) + 14 : (-7)) \cdot 4 - 3 = (6 + (-2)) \cdot 4 - 3$. Eliminamos el paréntesis que rodea al -2 y tenemos $(6+(-2)) \cdot 4-3 = (6-2) \cdot 4-3$. Realizamos la resta del paréntesis. Obtenemos $(6 - 2) \cdot 4 - 3 = 4 \cdot 4 - 3$. Realizamos el producto y tenemos $4 \cdot 4 - 3 = 16 - 3$. Por último realizamos la resta. Tenemos $16 - 3 = 13$, que es el resultado final.

c) $(-3) + 2 \cdot (4 + 2 \cdot 5) - 15 \cdot 2$.

En primer lugar eliminamos el paréntesis que rodea el -3 y también realizamos el producto de dentro del otro paréntesis. Obtenemos la siguiente igualdad: $(-3) + 2 \cdot (4 + 2 \cdot 5) - 15 \cdot 2 = -3 + 2 \cdot (4 + 10) - 15 \cdot 2$. Realizamos la suma del paréntesis para poder eliminarlo.

Tenemos: $-3 + 2 \cdot (4 + 10) - 15 \cdot 2 = -3 + 2 \cdot 14 - 15 \cdot 2$. Realizamos ambos productos: $-3 + 2 \cdot 14 - 15 \cdot 2 = -3 + 28 - 30$. Realizamos la suma y resta de izquierda a derecha. Obtenemos $-3 + 28 - 30 = 25 - 30 = -5$.

d) $(-100) + (200) - (-150) + (-3) \cdot (50)$.

En primer lugar eliminamos los paréntesis que rodean los tres primero números. Además multiplicamos el -3 y el 50. Obtenemos la siguiente igualdad: $(-100) + (200) - (-150) + (-3) \cdot (50) = -100 + 200 + 150 - 150$. Sumamos de izquierda a derecha los números que tenemos. Obtenemos las siguientes igualdades:

$-100 + 200 + 150 - 150 = 100 + 150 - 150 = 250 - 150 = 100$.

8.3. Matemáticas 2º ESO (Ejercicios + exámenes) - Álgebra y funciones

Ejercicio de examen 8.2 (Operaciones con polinomios)

Dados $P(x) = 2x^3 + 3x^2 + 5x - 3$, $Q(x) = -x^3 + 5x^2 - 3x - 3$ *y* $R(x) = 2x^2 - 5x - 3$, *calcula:*

a) *(1 punto)* $P(x) + 2Q(x) + R(x)$.

b) *(1 punto)* $\frac{1}{2}P(x) + \frac{1}{3}Q(x)$.

c) *(1 punto)* $P(x) \cdot R(x)$.

$a)$ $P(x) + 2Q(x) + R(x)$.

Sustituimos cada polinomio por su expresión. Obtenemos:

$P(x)+2Q(x)+R(x) = (2x^3+3x^2+5x-3)+2(-x^3+5x^2-3x-3)+(2x^2-5x-3)$.

Ahora quitamos los paréntesis. El primer y tercer paréntesis se quedan como están. Los coeficientes del segundo se multiplican por 2. Obtenemos:

$P(x)+2Q(x)+R(x) = 2x^3+3x^2+5x-3-2x^3+10x^2-6x-6+2x^2-5x-3$.

Por último sumamos los monomios semejantes.

Obtenemos: $P(x) + 2Q(x) + R(x) = 15x^2 - 6x - 12$.

$b)$ $\frac{1}{2}P(x) + \frac{1}{3}Q(x)$.

En primer lugar sustituimos cada polinomio por su expresión. Obtenemos:

$\frac{1}{2}P(x) + \frac{1}{3}Q(x) = \frac{1}{2}(2x^3 + 3x^2 + 5x - 3) + \frac{1}{3}(-x^3 + 5x^2 - 3x - 3)$.

Para eliminar los paréntesis multiplicamos cada coeficiente del primer paréntesis por $\frac{1}{2}$ y cada coeficiente del segundo paréntesis por $\frac{1}{3}$. Obtenemos: $\frac{1}{2}P(x) + \frac{1}{3}Q(x) = x^3 + \frac{3}{2}x^2 + \frac{5}{2}x - \frac{3}{2} - \frac{1}{3}x^3 + \frac{5}{3}x^2 - x - 1$.

Por último sumamos los monomios semejante. Para ello, tendremos que hacer mínimo común denominador. Obtenemos:

$\frac{1}{2}P(x) + \frac{1}{3}Q(x) = \frac{2}{3}x^3 + \frac{19}{6}x^2 + \frac{3}{2}x - \frac{5}{2}$.

c) $P(x) \cdot R(x)$.

En primer lugar sustituimos cada polinomio por su expresión. Tenemos:

$P(x) \cdot R(x) = (2x^3 + 3x^2 + 5x - 3) \cdot (2x^2 - 5x - 3)$.

Multiplicamos cada monomio del primer polinomio por cada monomio del segundo polinomio. Obtenemos: $P(x) \cdot R(x) = 4x^5 - 10x^4 - 6x^3 + 6x^4 - 15x^3 - 9x^2 + 10x^3 - 25x^2 - 15x - 6x^2 + 15x + 9$.

Sumando monomios semejantes: $P(x) \cdot R(x) = 4x^5 - 4x^4 - 11x^3 - 40x^2 + 9$.

8.4. Matemáticas 2º ESO (Ejercicios + exámenes) - Geometría y probabilidad y estadística

Ejercicio de examen 8.3 (Regla de Laplace)

(2 puntos) Se lanza una bola en una ruleta de 36 *casillas, numeradas del* 1 *al* 36.

a) *Calcula la probabilidad de que salga un número múltiplo de 4.*

b) *Calcula la probabilidad de que sea un número que sea múltiplo de 3 o múltiplo de 5.*

a) Calcula la probabilidad de que salga un número múltiplo de 4.

Vamos a utilizar la Regla de Laplace. Observamos que tenemos 36 casos posibles (los números del 1 al 36). Ahora contamos los números, de esos 36, que son múltiplos de 4. Obtenemos: 4, 8, 12, 16, 20, 24, 28, 32 y 36. Tenemos nueves casos favorables. Es decir, $P(\text{múltiplo de } 4) = \dfrac{9}{36} = 0'25$.

b) Calcula la probabilidad de que sea un número que sea múltiplo de 3 o múltiplo de 5.

Tenemos, de nuevo, 36 casos posibles. Los casos favorables son: 3, 5, 6, 9, 10, 12, 15, 18, 20, 21, 24, 25, 27, 30, 33, 35 y 36. Tenemos 17 casos favorables. Por tanto, $P(\text{Múltiplo de 3 ó 5}) = \dfrac{17}{36}$.

8.5. Matemáticas 2º ESO (Ejercicios)

Ejercicio 8.2 (Problema de m.c.m.)

Cuatro corredores dan vueltas en un circuito. Uno tarda 200 *segundos en completar una vuelta, el segundo tarda* 250 *segundos, el tercero tarda* 5 *minutos y el cuarto* 150 *segundos. Si los tres coinciden al mediodía en la línea de salida, ¿a qué hora volverán a coincidir, de nuevo los cuatro, por primera vez?¿Cuántas vueltas habrá dado cada uno?*

Si un corredor tarda 200 segundos en dar una vuelta, volverá a la línea de salida transcurridos 200, 400, 600, etc. segundos. Es decir, con cualquier múltiplo de 200. Es decir, buscamos múltiplos de cada uno de los números que tenemos en el enunciado. Dado que queremos que coincidan todos en la línea de salida, queremos que sea un múltiplo común. Como queremos que sea por primera vez buscamosel más pequeño de todos los múltiplos comunes.

Es decir, el mínimo común múltiplo.

En primer lugar debemos pasar los cinco minutos a segundos. Para ello, multiplicamos por 60. Obtenemos 300 segundos.

Es decir tardarán m.c.m.$(200, 250, 300, 150)$ segundos en volver a coincidir.

Factorizando cada número tenemos que $200 = 2^3 \cdot 5^2$, $250 = 2 \cdot 5^3$, $300 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5^2$ y $150 = 2 \cdot 3 \cdot 5^2$.

Tomamos los factores comunes y no comunes al mayor exponente. Obtenemos que m.c.m.$(200, 250, 300, 150) = 2^3 \cdot 3 \cdot 5^3 = 3000$. Es decir, tardarán 3000 segundos en volver a coincidir. Si lo pasamos a segundos obtenemos que tardan en coincidir $3000 : 60 = 50$ minutos. Por tanto, volverán a coincidir a las $12 : 50$. El primero habrá dado $3000 : 200 = 15$ vueltas, el segundo $3000 : 250 = 12$, el tercero $3000 : 300 = 10$ y el cuarto $3000 : 150 = 20$.

8.6. Matemáticas 2º ESO (Exámenes)

Ejercicio de examen 8.4 (Resolución de sistema por sustitución)

(1'5 puntos) Resuelve el siguiente sistema por sustitución:

$$\left\{ \begin{array}{c} 5x + 4y = 7 \\ 2x - 3y = 12 \end{array} \right\}.$$

En primer lugar debemos despejar una de las incógnitas de una de las ecuaciones. Vamos a despejar la x en la segunda ecuación (por tener el coeficiente más pequeño). Pasamos primer el $3y$ a la derecha. Obtenemos $2x = 12 + 3y$. Ahora pasamos el 2 dividiendo. Obtenemos la expresión $x = \dfrac{12 + 3y}{2}$.

Sustituimos la expresión obtenida en el anterior párrafo en la primera ecuación. Obtenemos: $5\left(\dfrac{12 + 3y}{2}\right) + 4y = 7$.

Ponemos el 5 en el numerador de la fracción: $\dfrac{5(12 + 3y)}{2} + 4y = 7$.

Hacemos mínimo común denominador. Tenemos: $\dfrac{5(12 + 3y)}{2} + \dfrac{8y}{2} = \dfrac{14}{2}$.

Eliminamos los denominadores: $5(12 + 3y) + 8y = 14$.

Multiplicando el 5 por el paréntesis tenemos: $60 + 15y + 8y = 14$.

Al tener una ecuación de primer grado la resolvemos pasando las y a la izquierda y los términos sin y a la derecha. Obtenemos: $15y+8y = 14-60$.

Sumando tenemos: $23y = -46$. Pasando el 23 dividiendo al segundo miembro obtenemos que $y = \dfrac{-46}{23} = -2$.

Sustituyendo en la expresión despejada del primer párrafo tenemos el valor de la x, que es: $x = \dfrac{12 + 3(-2)}{2} = 3$.

Es decir, la solución del sistema es $(x, y) = (3, -2)$.

Capítulo 9

Matemáticas 1º ESO.

9.1. Matemáticas 1º ESO (Ejercicios + exámenes)

Ejercicio de examen 9.1 (Ecuaciones de primer grado)

Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) *(1'5 puntos)* $5(x+5)+4(3-2x)=8(x-3)-12(x-2)$.

b) *(1'5 puntos)* $\dfrac{4-x}{3}-\dfrac{2(2-5x)}{2}=\dfrac{3(2x-1)}{4}-\dfrac{5-8x}{3}$.

a) $5(x+5)+4(3-2x)=8(x-3)-12(x-2)$.

En primer lugar eliminamos los paréntesis. Para ello, multiplicamos cada coeficiente delante de los paréntesis por los coeficientes de los polinomios de dentro de los paréntesis.

Obtenemos: $5x+25+12-8x=8x-24-12x+24$.

Pasamos todos los términos con x a la izquierda y todos los que no tienen x al derecho. Obtenemos: $5x - 8x - 8x + 12x = -25 - 12 - 24 + 24$.

Sumando tenemos: $x = -37$.

b) $\dfrac{4-x}{3} - \dfrac{2(2-5x)}{2} = \dfrac{3(2x-1)}{4} - \dfrac{5-8x}{3}$.

En primer lugar, debemos eliminar los denominadores. Para ello, calculamos el mínimo común denominador. El mínimo común múltiplo de los denominadores es 12. Observamos que en las fracciones que tienen un paréntesis en el numerador, solamente multiplicamos el término que está fuera del paréntesis.

Obtenemos: $\dfrac{4(4-x)}{12} - \dfrac{12(2-5x)}{12} = \dfrac{9(2x-1)}{12} - \dfrac{4(5-8x)}{12}$.

Eliminando los denominadores tenemos la siguiente ecuación equivalente:
$4(4-x) - 12(2-5x) = 9(2x-1) - 4(5-8x)$.

Eliminando los paréntesis tenemos: $16-4x-24+60x = 18x-9-20+32x$.

Dado que la ecuación es de primer grado, pasamos todos los términos lineales (grado 1) a la izquierda y los que no tienen x al segundo. Obtenemos la ecuación $-4x + 60x - 18x - 32x = -16 + 24 - 9 - 20$.

Sumando tenemos $6x = -21$.

Pasamos el 6 dividiendo a la derecha y tenemos $x = \dfrac{-21}{6} = -\dfrac{7}{2}$.

9.2. Matemáticas 1º ESO (Ejercicios + exámenes) - Números

Ejercicio 9.1 (Problemas de M.C.D.)

Tenemos en un almacén 48 *latas de atún,* 84 *latas de sardinas y* 60 *latas de caballa. Queremos dividir las latas en packs, sin que sobre ninguna, que contengan el mismo número de latas, sin mezclar los tipos de productos y que además cada pack tenga la mayor cantidad de latas posibles. ¿Cuántos packs de cada tipo obtenemos?*

Dado que queremos dividir las latas en paquetes, debemos hallar un divisor de cada número. Además dado que el número de latas en cada pack debe ser igual, el divisor debe ser común. Por último, queremos que el número de latas en cada pack sea lo más grande posible. Por tanto, estamos buscando el divisor común más grande posible. Es decir, la solución es M.C.D.$(48, 84, 60)$.

En primer lugar, factorizamos cada número. Tenemos $48 = 2^4 \cdot 3$, $84 = 2^2 \cdot 3 \cdot 7$ y $60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$.

Tomando los factores comunes elevados al menor exponente tenemos que M.C.D.$(48, 84, 60) = 2^2 \cdot 3 = 12$.

Es decir, cada pack debe tener 12 latas.

Obtenemos $48 : 12 = 4$ packs de latas de atún, $84 : 12 = 7$ packs de latas de sardinas y $60 : 12 = 5$ packs de latas de caballa.

9.3. Matemáticas 1º ESO (Ejercicios + exámenes) - Álgebra, funciones y probabilidad y estadística

Ejercicio 9.2 (Problemas con ecuaciones)

El triple de un número supera en 16 *al número original. ¿Cuál es ese número?*

Llamamos x al número que queremos calcular.

El triple del número se escribe como $3x$. El número original más 16 se escribe como $x + 16$.

Igualando ambas expresiones tenemos la ecuación $3x = x + 16$.

Pasando la x al primer miembro tenemos $3x - x = 16$.

Operando tenemos $2x = 16$.

Pasamos el 2 dividiendo a la derecha. Tenemos $x = \dfrac{16}{2} = 8$.

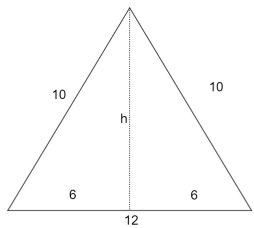
Es decir, el número original es el 8.

9.4. Matemáticas 1º ESO (Ejercicios + exámenes) - Geometría

Ejercicio de examen 9.2 (Pitágoras - Área de un triángulo)

(1 punto) Halla el área de un triángulo isósceles, sabiendo que su base mide 12 *centímetros y los lados que son iguales miden* 10 *centímetros cada uno.*

Comenzamos realizando un dibujo de la situación. Tenemos el triángulo de la figura al que añadimos el segmento punteado (la altura). Observamos que nos quedan dos triángulos rectángulos iguales. Uno a la derecha y otro a la izquierda.



Para obtener el área del triángulo necesitamos su base (ya la tenemos) y altura (debemos calcularla). Para clacular la altura h, vamos a utilizar el Teorema de Pitágoras sobre el triángulo de la derecha. El cateto inferior mide 6 (la mitad de la base del triángulo grande. El otro cateto es la altura y mide h. La hipotenusa del triángulo rectángulo es uno de los dos lados iguales del triángulo original, es decir, 10.

Aplicando el Teorema de Pitágoras tenemos que $10^2 = 6^2 + h^2$. Operando tenemos $100 = 36 + h^2$. Pasamos el 36 restando. Obtenemos la ecuación $64 = h^2$. Tomando raíces cuadradas a los dos lados obtenemos que $h = 8$. El área del triángulo es Área$= \dfrac{b \cdot h}{2} = \dfrac{12 \cdot 8}{2} = 48$ centímetros cuadrados.

9.5. Matemáticas 1º ESO (Ejercicios)

Ejercicio 9.3 (Notación científica)

Transforma los siguientes números a notación científica o notación decimal:

a) 120000000.

b) $20004'125$.

c) $0'000000045$.

d) $0'0000087$.

e) $1'456 \cdot 10^6$.

f) $8'34 \cdot 10^9$.

g) $1'573 \cdot 10^{-3}$.

h) $8'964 \cdot 10^{-7}$.

Para transformar los números a notación científica, debemos colocar la coma decimal justo detrás del primer dígito no nulo. Contamos cuántas posiciones hemos movido la coma.

Si el movimiento es hacia la izquierda, el exponente de 10 será positivo. Si el movimiento es hacia la derecha, el exponente de 10 será negativo. Así obtenemos:

a) $120000000 = 1'2 \cdot 10^8$.

b) $20004'125 = 20004'125 \cdot 10^4$.

c) $0'000000045 = 4'5 \cdot 10^{-8}$.

d) $0'0000087 = 8'7 \cdot 10^{-6}$.

Para transformar a notación decimal, movemos la coma decimal tantas posiciones como indica el exponente.

Si es exponente es positivo, el movimiento es hacia la derecha y si es negativo, la coma se mueve a la izquierda. Por tanto:

e) $1'456 \cdot 10^6 = 1456000$.

f) $8'34 \cdot 10^9 = 8340000000$.

g) $1'573 \cdot 10^{-3} = 0'001573$.

h) $8'964 \cdot 10^{-7} = 0'0000008964$.

9.6. Matemáticas 1º ESO (Exámenes)

Ejercicio de examen 9.3 (Operaciones con potencias)

Escribe como una sola potencia y después calcula el resultado:

a) *(0'25 puntos)* $[(-2)^2 \cdot (-2)^4] : (-2)^5$

b) *(0'25 puntos)* $(8^3 : 4^3) : (6^2 : 3^2)$

c) *(0'25 puntos)* $(-2)^4 \cdot [(-8)^2 : 4^2]$

d) *(0'25 puntos)* $[3^3 \cdot (3^2)^5]^2 : (3^6)^4$

e) *(0'25 puntos)* $(27 \cdot 3^4) : (3^3)^2$

f) *(0'25 puntos)* $(25)^3 \cdot 5^4 : 5^2$

a) $[(-2)^2 \cdot (-2)^4] : (-2)^5$

$[(-2)^2 \cdot (-2)^4] : (-2)^5 = (-2)^6 : (-2)^5 = -2$

b) $(8^3 : 4^3) : (6^2 : 3^2)$

$(8^3 : 4^3) : (6^2 : 3^2) = 2^3 : 2^2 = 2$

c) $(-2)^4 \cdot [(-8)^2 : 4^2]$

$(-2)^4 \cdot [(-8)^2 : 4^2] = (-2)^4 \cdot (-2)^2 = (-2)^6 = 64$

d) $[3^3 \cdot (3^2)^5]^2 : (3^6)^4$

$[3^3 \cdot (3^2)^5]^2 : (3^6)^4 = [3^3 \cdot 3^{10}]^2 : (3^6)^4 = [3^{13}]^2 : 3^{24} = 3^{26} : 3^{24} = 3^2 = 9$

e) $(27 \cdot 3^4) : (3^3)^2$

$(27 \cdot 3^4) : (3^3)^2 = (3^3 \cdot 3^4) : 3^6 = 3^7 : 3^6 = 3$

f) $(25)^3 \cdot 5^4 : 5^2$

$(25)^3 \cdot 5^4 : 5^2 = (5^2)^3 \cdot 5^4 : 5^2 = 5^6 \cdot 5^4 : 5^2 = 5^{10} : 5^2 = 5^8 = 390625$

Índice temático.

Lista de ejercicios.