Ejercicio 1 (Operaciones con radicales (IV), extraído de la unidad 1)

Realiza las siguientes operaciones con radicales (extrae factores y racionaliza siempre que sea posible):

a) $\sqrt{x}\cdot\sqrt[3]{x^2}\cdot\sqrt[4]{x^3}$.

b) $\dfrac{\sqrt[5]{\sqrt[3]{a^{1456}}}}{\sqrt{\sqrt[3]{\sqrt[4]{a^{2567}}}}}$.

a) $\sqrt{x}\cdot\sqrt[3]{x^2}\cdot\sqrt[4]{x^3}$.

Hallamos índice común para poder multiplicar las raíces:

$$\sqrt{x}\cdot\sqrt[3]{x^2}\cdot\sqrt[4]{x^3} = \sqrt[12]{x^6}\cdot\sqrt[12]{x^8}\cdot\sqrt[12]{x^9} = \sqrt[12]{x^{23}}.$$

Extraemos factores, teniendo en cuenta que $23 = 1\cdot 12+11$. Tenemos, por lo tanto la igualdad:

$$\sqrt{x}\cdot\sqrt[3]{x^2}\cdot\sqrt[4]{x^3} = x\,\sqrt[12]{x^{11}}.$$

b) $\dfrac{\sqrt[5]{\sqrt[3]{a^{1456}}}}{\sqrt{\sqrt[3]{\sqrt[4]{a^{2567}}}}}$.

En primer lugar debemos multiplicar los índices de las raíces encadenadas del numerador y del denominador:

$$\frac{\sqrt[5]{\sqrt[3]{a^{1456}}}}{\sqrt{\sqrt[3]{\sqrt[4]{a^{2567}}}}} = \frac{\sqrt[15]{a^{1456}}}{\sqrt[24]{a^{2567}}}.$$

Hallamos índice común de las raíces de numerador y denominador y, posteriormente, dividimos:

$$\frac{\sqrt[5]{\sqrt[3]{a^{1456}}}}{\sqrt{\sqrt[3]{\sqrt[4]{a^{2567}}}}} = \frac{\sqrt[120]{a^{11648}}}{\sqrt[120]{a^{12835}}} = \frac{1}{\sqrt[120]{a^{1187}}}.$$

Extraemos factores de la raíz del denominador, teniendo en cuenta que podemos escribir $1187 = 9 \cdot 120 + 107$, escribimos la última raíz de la siguiente manera:

$$\frac{\sqrt[5]{\sqrt[3]{a^{1456}}}}{\sqrt{\sqrt[3]{\sqrt[4]{a^{2567}}}}} = \frac{1}{a^9 \sqrt[120]{a^{107}}}.$$

Racionalizamos multiplicando y dividiendo por $\sqrt[120]{a^{13}}$ y obtenemos:

$$\frac{\sqrt[5]{\sqrt[3]{a^{1456}}}}{\sqrt{\sqrt[3]{\sqrt[4]{a^{2567}}}}} = \frac{\sqrt[120]{a^{13}}}{a^{10}}.$$

Ejercicio 2 (Propiedades de logaritmos, extraído del tema 2)

Suponiendo que $\log 2 = 0'3$ *y* $\log 3 = 0'47$*, calcula:*

a) $\log 24$.

b) $\log \frac{4}{3}$.

c) $\log \sqrt{480}$.

d) $\log \frac{1}{15}$.

e) $\log_2 3$.

a) En primer lugar factorizamos 24 en función de 2, 3 (valores que tenemos en el enunciado) y 10 (base del logaritmo). Es decir, $24 = 2^3 \cdot 3$. Por tanto, tenemos $\log 24 = \log 2^3 \cdot 3 = \log 2^3 + \log 3$. Bajamos el exponente 3 delante del logaritmo y tenemos: $\log 2^3 + \log 3 = 3 \log 2 + \log 3$. Sustituyendo en la última expresión tenemos $\log 24 = 3 \cdot 0'3 + 0'47 = 1'37$.

b) En primer lugar, partimos la fracción en dos: $\log \frac{4}{3} = \log 4 - \log 3$. Factorizamos el 4 y tenemos $\log \frac{4}{3} = \log 2^2 - \log 3$. Bajamos el cuadrado del exponente delante del logaritmo, $\log \frac{4}{3} = 2 \log 2 - \log 3 = 2 \cdot 0'3 - 0'47 = 0'13$.

c) Dado que $\sqrt{480} = 480^{\frac{1}{2}}$, tenemos que $\log \sqrt{480} = \frac{1}{2} \log 480$.

Factorizando $480 = 10 \cdot 3 \cdot 2^4$. Es decir, $\log \sqrt{480} = \frac{1}{2} \log \left(10 \cdot 3 \cdot 2^4\right)$. Separamos los factores en sumas: $\log \sqrt{480} = \frac{1}{2} \left(\log 10 + \log 3 + \log 2^4\right)$. Bajamos el exponente: $\log \sqrt{480} = \frac{1}{2} (\log 10 + \log 3 + 4 \log 2)$.

Sustituyendo, $\log \sqrt{480} = \frac{1}{2} (1 + 0'47 + 4 \cdot 0'3) = \frac{1}{2} 2'67 = 1'335$.

d) Con el 15 tenemos un pequeño problema, ya que si los factorizamos, tenemos que $15 = 3 \cdot 5$, pero no conocemos el $\log 5$ de manera directa. Tenemos dos opciones, hallar este logaritmo aparte o multiplicar al numerador y denominador de la fracción por 2 para obtener un 30. Elegimos esta segunda opción. Es decir, $\log \frac{1}{15} = \log \frac{2}{30}$.

Separando la fracción en dos logaritmos tenemos $\log \frac{1}{15} = \log 2 - \log 30$. Factorizando el 30, tenemos $\log \frac{1}{15} = \log 2 - \log(3 \cdot 10)$.

Separando el producto del segundo logaritmo en dos , mediante una suma, tenemos la expresión $\log \frac{1}{15} = \log 2 - (\log 3 + \log 10)$. Sustituyendo los logaritmos por su valor $\log \frac{1}{15} = 0'3 - (0'47 + 1) = -1'17$.

Ejercicio 3 (Teorema del Resto (II), extraído del tema 3)

Halla el valor de k para que el resto de la siguiente división sea 10:

$\left(x^4 + kx^3 - 5x^2 + 6\right) : (x - 1)$.

Llamamos $P(x) = x^4 + kx^3 - 5x^2 + 6$. Aplicando el Teorema del Resto, debe ser $P(1) = 10$. Es decir, $P(1) = 1 + k - 5 + 6 = 10$. Despejando, tenemos $k = 8$.

Ejercicio 4 (Teorema del Factor, extraído del tema 3)

Halla el valor de k para que el polinomio $P(x) = 2x^3 - x^2 + kx - 4$ *sea divisible entre* $x - 2$.

Aplicando el teorema del Factor debe ser $P(2) = 0$. Sustituyendo en $P(x)$ tenemos que $2 \cdot 2^3 - 2^2 + 2k - 4 = 0$. Despejando, debe ser $k = -4$.

Ejercicio 5 (Ecuaciones irracionales, extraído del tema 4)

Resuelve las siguientes ecuaciones irracionales:

a) $\sqrt{3x+4} + 2x - 4 = 0$.

b) $\sqrt{x^2+x} - \sqrt{x+1} = 0$.

a) $\sqrt{3x+4} + 2x - 4 = 0$.

Aislamos la raíz cuadrada para poder elevar ambos términos al cuadrado.

$\sqrt{3x+4} + 2x - 4 = 0 \Rightarrow \sqrt{3x+4} = 4 - 2x \Rightarrow 3x + 4 = 16 - 16x + 4x^2$.

Dado que tenemos términos de grado dos, pasamos todos al segundo miembro: $4x^2 - 19x + 12 = 0$. Resolvemos $x = \dfrac{19 \pm \sqrt{361-192}}{8} = \dfrac{19 \pm 13}{8}$. Es decir, las soluciones de la ecuación de segundo grado son $x = 4$ y $x = \dfrac{3}{4}$. Comprobamos las soluciones:

$x = 4$. Sustituimos $\sqrt{12+4} + 8 - 4 \stackrel{?}{=} 0 \Rightarrow 8 \neq 0$. La solución no es válida.

$x = \dfrac{3}{4}$. Sustituimos $\sqrt{\dfrac{9}{4}+4} + \dfrac{3}{2} - 4 \stackrel{?}{=} 0 \Rightarrow 0 = 0$. La solución sí es válida.

b) $\sqrt{x^2+x} - \sqrt{x+1} = 0$.

Colocamos una raíz a cada lado de la igualdad para poder elevar al cuadrado.

$\sqrt{x^2+x} - \sqrt{x+1} = 0 \Rightarrow \sqrt{x^2+x} = \sqrt{x+1} \Rightarrow x^2 + x = x + 1$.

Pasamos todos los términos al primer miembro.

$x^2 - 1 = 0$. Resolvemos la ecuación y obtenemos $x = \pm 1$. Comprobamos las soluciones:

$x = 1$. Sustituimos: $\sqrt{1+1} - \sqrt{1+1} \stackrel{?}{=} 0 \Rightarrow \sqrt{2} - \sqrt{2} = 0$. Sí es válida.

$x = -1$. Sustituimos: $\sqrt{1-1} - \sqrt{-1+1} \stackrel{?}{=} 0 \Rightarrow \sqrt{0} - \sqrt{0} = 0$. Sí es válida.

Ejercicio 6 (Inecuaciones con una incógnita, extraído del tema 5)

Resuelve las siguientes inecuaciones:

a) $\dfrac{x+1}{2} - 3x \geq \dfrac{1-5x}{3} + 4.$

b) $\dfrac{3x-3}{5} - \dfrac{4x+8}{2} < \dfrac{x}{4} - 3x.$

a) $\dfrac{x+1}{2} - 3x \geq \dfrac{1-5x}{3} + 4.$

Es una inecuación de primer grado; por ello hacemos mínimo común denominador y después pasamos todas las incógnitas a un lado y los números al otro:

$$\frac{x+1}{2} - 3x \geq \frac{1-5x}{3} + 4 \Rightarrow \frac{3x+3-18x}{6} \geq \frac{2-10x+24}{6}.$$

Eliminamos los denominadores y pasamos las x al primer miembro y los términos sin x al segundo.

$$3x + 3 - 18x \geq 2 - 10x + 24 \Rightarrow -5x \geq 23.$$

Al pasar el -5 a la derecha, debemos cambiar el signo de la desigualdad:

$$x \leq -\frac{23}{5}.$$

b) $\dfrac{3x-3}{5} - \dfrac{4x+8}{2} < \dfrac{x}{4} - 3x.$

Es una inecuación de primer grado con denominadores; por ello hacemos mínimo común denominador:

$$\frac{3x-3}{5} - \frac{4x+8}{2} < \frac{x}{4} - 3x \Rightarrow \frac{12x-12-40x-80}{20} < \frac{5x-60x}{20}.$$

Eliminamos los denominadores y pasamos el 27 dividiendo:

$$27x < 92 \Rightarrow x < \frac{92}{27}.$$

Ejercicio 7 (Dominio de fracciones, extraído del tema 6)

Estudia el dominio de las siguientes funciones racionales:

a) $f(x) = \dfrac{1}{2x^3 + 16}$.

b) $f(x) = \dfrac{2}{4 - 5x}$.

a) $f(x) = \dfrac{1}{2x^3 + 16}$.

Dado que es una fracción entre polinomios valen todos los reales excepto los que anulan el denominador.

Es decir $\mathrm{Dom}(f) = \left\{x \in \mathbb{R} | 2x^3 + 16 \neq 0\right\}$. Resolvemos la ecuación de grado tres asociada: $2x^3 + 16 = 0 \Rightarrow 2x^3 = -16 \Rightarrow x^3 = -8 \Rightarrow x = -2$.

Por tanto, $\mathrm{Dom}(f) = \{x \in \mathbb{R} | x \neq -2\} = \mathbb{R} - \{-2\}$.

b) $f(x) = \dfrac{2}{4 - 5x}$.

Dado que se trata de un cociente de polinomios, el denominador no puede ser cero. Es decir, $\mathrm{Dom}(f) = \{x \in \mathbb{R} | 4 - 5x \neq 0\}$.

Resolvemos la ecuación $4 - 5x = 0 \Rightarrow 4 = 5x \Rightarrow x = \dfrac{4}{5}$.

Por tanto, $\mathrm{Dom}(f) = \left\{x \in \mathbb{R} | x \neq \dfrac{4}{5}\right\} = \mathbb{R} - \left\{\dfrac{4}{5}\right\}$.

Ejercicio 8 (Indeterminaciones $\left[\dfrac{0}{0}\right]$, extraído del tema 7)

Calcula los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x \to 5} \dfrac{x^2 - 6x + 5}{x^2 - 25}$.

b) $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x^2 - 4x + 3}{x^2 - 6x + 9}$.

a) $\lim\limits_{x \to 5} \dfrac{x^2 - 6x + 5}{x^2 - 25} = \dfrac{5^2 - 6 \cdot 5 + 5}{5^2 - 25} = \left[\dfrac{0}{0}\right]$.

Para resolver esta indeterminación factorizamos los polinomios y simplificamos lo que sea posible:

$$\lim_{x\to 5}\frac{x^2-6x+5}{x^2-25}=\lim_{x\to 5}\frac{(x-1)(x-5)}{(x+5)(x-5)}=\lim_{x\to 5}\frac{x-1}{x+5}=\frac{5-1}{5+5}=\frac{4}{10}=\frac{2}{5}.$$

b) $\lim_{x\to 3}\frac{x^2-4x+3}{x^2-6x+9}=\frac{3^2-4\cdot 3+3}{3^2-6\cdot 3+9}=\left[\frac{0}{0}\right].$

Para resolver esta indeterminación factorizamos los polinomios y simplificamos lo que sea posible:

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-4x+3}{x^2-6x+9}=\lim_{x\to 3}\frac{(x-1)(x-3)}{(x-3)^2}=\lim_{x\to 3}\frac{x-1}{x-3}=\frac{3-1}{3-3}=\left[\frac{2}{0}\right].$$

Hay que estudiar los límites laterales:

$$\lim_{x\to 3^-}\frac{x-1}{x-3}=\frac{2}{0^-}=-\infty.$$

$$\lim_{x\to 3^+}\frac{x-1}{x-3}=\frac{2}{0^+}=+\infty.$$

Ejercicio 9 (Regla de la cadena (potencias), extraído del tema 8)

Deriva las siguientes funciones potenciales:

a) $F(x)=\left(x^3+2x-3\right)^5.$

b) $F(x)=\sqrt[3]{3x^2+2}.$

a) Tenemos la composición de una potencia y una función polinómica. En primer lugar, derivamos la potencia. Para ello, bajamos el exponente, dejamos la misma potencia restándole uno al exponente y luego multiplicamos por la derivada de la base. La derivada del polinomio es la derivada del primer monomio ($3x^2$) más la derivada del segundo (2) menos la derivada del tercer monomio (0). Es decir,

$$F'(x)=5\left(x^3+2x-3\right)^4\cdot\left(x^3+2x-3\right)'=5\left(x^3+2x-3\right)^4\left(3x^2+2\right).$$

b) En primer lugar, observamos que la raíz cúbica equivale a un exponente $\frac{1}{3}$. Por tanto, tenemos una potencia.

Para derivarlo, bajamos el exponente y dejamos la potencia igual pero al exponente le restamos uno y al final multiplicamos por la derivada del polinomio. Dicha derivada es $6x$. Por tanto, tenemos,

$$F'(x) = \frac{1}{3}\left(3x^2+2\right)^{-\frac{2}{3}} \cdot \left(3x^2+2\right)' = \frac{2x}{\sqrt[3]{(3x^2+2)^2}}.$$

Ejercicio 10 (Combinatoria (IV), extraído del tema 10)

Se quieren colocar en una estantería 4 *libros de matemáticas,* 6 *de historia y* 3 *de química.*

a) Si los libros de cada materia son iguales, ¿de cuántas maneras diferentes se puede hacer?

b) Si los libros de cada materia son diferentes, ¿de cuántas maneras distintas se puede hacer?

a) Si los libros de cada materia son iguales, ¿de cuántas maneras diferentes se puede hacer?

Si tenemos libros iguales, tendremos repeticiones.

¿Elegimos todos los elementos? Sí.

¿Importa el orden en el qué se eligen los libros? Sí

¿Hay libros iguales? Sí.

Es decir, tendremos $\mathcal{PR}^{13}_{4,6,3} = \dfrac{13!}{4!6!3!} = 60060$ maneras de colocar los libros.

b) Si los libros de cada materia son diferentes, ¿de cuántas maneras distintas se puede hacer?

Sin embargo, si los libros son diferentes no tendremos repeticiones.

¿Elegimos todos los elementos? Sí.

¿Importa el orden en el qué se eligen los libros? Sí

¿Hay libros iguales? No.

Es decir, tenemos $\mathcal{P}_{13} = 13! = 6227020800$ maneras de colocar los libros.

Ejercicio 11 (Independencia (I))

Se elige al azar un número de cuatro cifras. Calcula las siguientes probabilidades:

a) *Que el número elegido sea par.*

b) *Que el número elegido termine en* 85.

c) *Que el número elegido sea mayor o igual que* 5000.

d) *¿Son los sucesos A el número elegido es par y B el número elegido es mayor o igual que* 5000 *independientes?*

a) Que el número elegido sea par.

En primer lugar, calculamos los números de cuatro cifras que tenemos. Esa cantidad será el número de casos posibles en la regla de Laplace.

Primero calculamos los números de cuatro cifras que hay (pueden empezar por cero). Para ello observamos que son variaciones con repetición (nos importa el orden y podemos repetir cifras) de 10 elementos tomados de 4 en 4. Es decir, tenemos $\mathcal{VR}_{10,4} = 10^4 = 10000$ posibilidades.

Ahora debemos quitar todas las posibilidades que empiezan por 0. De nuevo, son variaciones con repetición pero esta vez los elementos los tomamos de 3 en 3. Es decir, debemos eliminar $\mathcal{VR}_{10,3} = 10^3 = 1000$ posibilidades.

Es decir, hay exactamante 9000 números de cuatro cifras.

Para que el número sea par, su última cifra también debe serlo. Es decir, para la primera cifra (unidades de millar), tenemos nueve posibilidades (del 1 al 9), para las cifras de centenas y decenas son 10 por cada una y para la cifra de las unidades tenemos 5 posibilidades (que acabe en 0, 2, 4, 6 ó 8). Es decir, tenemos $9 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 5 = 4500$ números de cuatro cifras que son pares.

Aplicamos ahora la regla de Laplace.

$P(\text{el número es par}) = \dfrac{\text{casos favorables}}{\text{casos posibles}} = \dfrac{4500}{9000} = \dfrac{1}{2} = 0'5.$

b) Que el número elegido termine en 85.

Para que el número termine en 85 debemos elegir dos cifras válidas para las unidades de millar y para las centenas. Para las unidades de millar hay 9 opciones (del 1 al 9) y para la cifra de las centenas tenemos 10 posibilidades (del 0 al 9). En total, tenemos $9 \cdot 10 = 90$ posibilidades.

Aplicamos ahora la regla de Laplace.

$P(\text{el número acaba en 85}) = \dfrac{\text{casos favorables}}{\text{casos posibles}} = \dfrac{90}{9000} = \dfrac{1}{100} = 0'01.$

Ejercicio 12 (Distribución binomial (I), extraído del tema 12)

La probabilidad de que un jugador de baloncesto enceste una canasta de tres puntos es $0'6$. *Si tira a canasta cuatro veces, ¿cuál es la probabilidad de que enceste tres?¿Cuál es el número esperado de canastas, si realiza cuatro intentos?*

Observamos en primer lugar que tenemos un experimento (tirar a canasta) que se repite cuatro veces. Sabemos además que la probabilidad de encestar (éxito) es $0'6$. Lo que pretendemos es tener una variable **X** que cuenta el número de canastas encestadas (éxitos).

Por lo tanto, tenemos $\mathbf{X} \equiv \text{Bin}(4, 0'6)$. Nos piden la probabilidad de encestar tres. Es decir,

$P(\mathbf{X} = 3) = \binom{4}{3} \cdot 0'6^3 \cdot 0'4^1 = 0'3456.$

Calcular el número esperado de aciertos equivale a calcular la media de la variable **X**. Es decir, se esperan $E[\mathbf{X}] = n \cdot p = 4 \cdot 0'6 = 2'4$ canastas.

Ejercicio 13 (Tabla de frecuencias (II), extraído del tema 14)

Hemos contabilizado el número de llamadas que ha recibido un teléfono en el último mes, obteniendo los siguientes resultados:

0	2	3	3	1	2	4	3	2	0
2	1	4	0	2	3	1	2	0	0
1	2	0	0	4	2	2	1	3	1

Realiza una tabla de frecuencias completa.

Realiza una tabla de frecuencias completa.

Dado que es una variable cuantitativa, podemos hallar frecuencias acumuladas. Tenemos:

x_i	f_i	h_i	F_i	H_i
0	7	$\frac{7}{30} = 0'23$	7	$0'23$
1	6	$\frac{6}{30} = 0'2$	13	$0'43$
2	9	$\frac{9}{30} = 0'3$	22	$0'73$
3	5	$\frac{5}{30} = 0'17$	27	$0'9$
4	3	$\frac{3}{30} = 0'1$	30	1