**Ejercicio 1 (Extraído del Capítulo A)**

*(2 puntos) Queremos embaldosar una sala rectangular con baldosas cuadradas de longitud entera (en centímetros), con el menor número de baldosas y sin romper ninguna. Sabiendo que las dimensiones de la sala son* 240 *y* 340 *centímetros. ¿Cuál es el lado de la baldosa?¿Cuántas baldosas se necesitan?*

Dado que queremos encontrar el lado de la baldosa sin romperlas, debemos encontrar un divisor de 240 y 340. Dado que la baldosa debe ser cuadrada tenemos que el lado de la baldosa debe ser divisor de ambos números. Por último, dado que queremos usar el menor número posible de baldosas, el lado debe ser lo mayor posible. Es decir, necesitamos encontrar el M.C.D.$(240, 340)$.

Factorizamos ambos números. Obtenemos:

- $240 = 2^4 \cdot 3 \cdot 5$.
- $340 = 2^2 \cdot 5 \cdot 17$.

Ahora, para obtener el Máximo Común Divisor tomamos los factores comunes elevados al menor exponente. Es decir, el lado de cada baldosa debe medir M.C.D.$(240, 340) = 2^2 \cdot 5 = 20$ centímetros. Para cubrir el largo de la sala necesitamos $340 : 20 = 17$ baldosas y para cubrir el ancho necesitamos $240 : 20 = 12$ baldosas. Por lo tanto, necesitamos $12 \cdot 17 = 204$ baldosas.

**Ejercicio 2 (Extraído del Capítulo B)**

*(2 puntos) Expresa como producto de potencias cuyas bases son números primos:* $\dfrac{12^6 \cdot 18^{-5}}{9^4 \cdot 6^{-3}}$.

En primer lugar factorizamos cada una de las bases. Obtenemos $12 = 2^2 \cdot 3$, $18 = 2 \cdot 3^2$, $9 = 3^2$ y $6 = 2 \cdot 3$. Por tanto la operación es:

$$\frac{12^6 \cdot 18^{-5}}{9^4 \cdot 6^{-3}} = \frac{\left(2^2 \cdot 3\right)^6 \cdot \left(2 \cdot 3^2\right)^{-5}}{(3^2)^4 \cdot (2 \cdot 3)^{-3}}.$$

Separamos los tres productos que están en las bases de potencias y los transformamos en producto de potencias. Obtenemos:

$$\frac{\left(2^2 \cdot 3\right)^6 \cdot \left(2 \cdot 3^2\right)^{-5}}{(3^2)^4 \cdot (2 \cdot 3)^{-3}} = \frac{\left(2^2\right)^6 \cdot (3)^6 \cdot (2)^{-5} \cdot \left(3^2\right)^{-5}}{(3^2)^4 \cdot (2)^{-3} \cdot (3)^{-3}}.$$

Ahora multiplicamos los exponentes de las potencias encadenadas. Obtenemos:

$$\frac{\left(2^2\right)^6 \cdot (3)^6 \cdot (2)^{-5} \cdot \left(3^2\right)^{-5}}{(3^2)^4 \cdot (2)^{-3} \cdot (3)^{-3}} = \frac{2^{12} \cdot 3^6 \cdot 2^{-5} \cdot 3^{-10}}{3^8 \cdot 2^{-3} \cdot 3^{-3}}.$$

Multiplicamos las potencias del numerador entre sí y las del denominador entre sí. Para ello sumamos los exponentes de las potencias con la misma base. Obtenemos:

$$\frac{2^{12} \cdot 3^6 \cdot 2^{-5} \cdot 3^{-10}}{3^8 \cdot 2^{-3} \cdot 3^{-3}} = \frac{2^7 \cdot 3^{-4}}{2^{-3} \cdot 3^5}.$$

Por último dividimos las potencias con la misma base, restando los exponentes. Obtenemos:

$$\frac{2^7 \cdot 3^{-4}}{2^{-3} \cdot 3^5} = 2^{10} \cdot 3^{-9}.$$

**Ejercicio 3 (Extraído del Capítulo D)**

*Para alimentar a* 15 *familias durante* 8 *días necesitamos* 300 *kg de comida. Responde a las siguientes cuestiones:*

*a) (1 punto) ¿Cuánta comida necesitaremos para alimentar a* 10 *familias durante* 12 *días?*

*b) (1 punto) ¿Cuántos días podremos alimentar a* 10 *familias con* 250 *kg de comida?*

*a*) ¿Cuánta comida necesitaremos para alimentar a 10 familias durante 12 días?

Observamos que nos preguntan por la magnitud comida. Por tanto, la ponemos la primera.

| Comida | Familias | Días |
|---|---|---|
| 300 | 15 | 8 |
| $x$ | 10 | 12 |

Ahora comprobamos qué tipo de proporcionalidad tienen la segunda y tercera columnas respecto de la primera. Nos preguntamos:

Fijando el tiempo. Con más comida, se alimentan ¿más o menos familias? Se alimentan más. Por tanto, las magnitudes comida y familias son directamente proporcionales.

Fijando el número de familias. Con más comida, se alimentan ¿más o menos días? Se alimentan más. Por tanto, las magnitudes comida y días son directamente proporcionales.

Ahora resolvemos. La primera fracción la dejamos como está y ponemos un =. Ahora como la primera y segunda magnitudes son directamente proporcionales, dejamos la fracción $\frac{15}{10}$ como está. Por último multiplicamos por la última fracción como está (dado que las magnitudes comida y días son directamente proporcionales.

Debemos resolver $\frac{300}{x} = \frac{15}{10} \cdot \frac{8}{12} = \frac{15 \cdot 8}{10 \cdot 12}$. Resolviendo la regla de tres tenemos que $x = \frac{300 \cdot 10 \cdot 12}{15 \cdot 8} = 300$. Es decir, necesitaremos 300 kg de comida.

*b*) ¿Cuántos días podremos alimentar a 10 familias con 250 kg de comida?

En este apartado nos preguntan por la magnitud días. Por tanto, la ponemos la primera.

| Días | Comida | Familias |
|---|---|---|
| 8 | 300 | 15 |
| $x$ | 250 | 10 |

Ahora comprobamos qué tipo de proporcionalidad tienen las magnitudes comida y familias respecto de días.

Dejando el número de familias fijo. Para alimentarlas durante más días, ¿necesitamos más o menos comida? Más comida. Por tanto, las magnitudes días y comida son directamente proporcionales.

Con una cantidad fija de comida. Si queremos que nos dure más días, ¿podemos alimentar a más o a menos familias? Menos. Por tanto, las magnitudes días y familias son inversamente proporcionales.

Ahora resolvemos. La primera fracción se queda igual, seguida de un =. La segunda también la dejamos igual, porque las magnitudes correspondientes son directamnete proporcionales. Multiplicamos por la segunda fracción invertida, dado que las magnitudes correspondientes son inversamente proporcionales.
Tenemos $\frac{8}{x} = \frac{300}{250} \cdot \frac{10}{15}$. Es decir, tenemos $x = \frac{8 \cdot 250 \cdot 15}{10 \cdot 300} = 10$. Es decir, se podrán alimentar durante 10 días.

**Ejercicio 4 (Extraído del Capítulo F)**

*(2 puntos) Queremos hacer dos tipos de pulseras. La primera lleva* 4 *bolas rojas y* 3 *azules y la segunda lleva* 2 *rojas y* 5 *azules. Si en total hemos gastado* 180 *bolas rojas y* 205 *azules, ¿cuántas pulseras de cada tipo hemos hecho?*

Llamamos $x$ al número de pulseras del primer tipo y llamamos $y$ al número de pulseras del segundo tipo.

Para hacer $x$ pulseras del primer tipo, necesitamos $4x$ bolas rojas. Para hacer $y$ pulseras del segundo tipo, necesitamos $2y$ bolas rojas. En total, para hacerlas todas, necesitamos $4x + 2y$ bolas; y esta cantidad coincide con 180. Es decir, la primera ecuación es $4x + 2y = 180$.

Para hacer $x$ pulseras del primer tipo, necesitamos $3x$ bolas azules. Para hacer $y$ pulseras del segundo tipo, necesitamos $5y$ bolas azules. En total, para hacerlas todas, necesitamos $3x + 5y$ bolas; y esta cantidad coincide con 205. Es decir, la segunda ecuación es $3x + 5y = 205$.

Por tanto, el sistema que debemos resolver es

$$\left.\begin{cases} 4x + 2y = 180 \\ 3x + 5y = 205 \end{cases}\right\}.$$

Vamos a resolver por sustitución. Despejamos la $y$ de la primera ecuación. Pasamos el $4x$ restando. Obtenemos $2y = 180 - 4x$. Después pasamos el 2 dividiendo. Obtenemos la expresión $y = \dfrac{180 - 4x}{2}$. Simplificando tenemos $y = 90 - 2x$.

Sustituyendo la expresión en la segunda ecuación tenemos $3x + 5(90 - 2x) = 205$. Quitando el paréntesis obtenemos $3x + 450 - 10x = 205$. Dejando los términos con $x$ en el primer miembro y los que no tienen $x$ en el segundo, obtenemos $3x - 10x = 205 - 450$. Operando tenemos $-7x = -245$. Dividiendo entre $-7$ obtenemos $x = 35$.

Sustituimos en la expresión despejada de $y$, para obtener el valor que nos falta. Tenemos $y = 90 - 2 \cdot 35 = 20$.

Es decir, hemos hecho 35 pulseras del primer tipo y 20 del segundo.

**Ejercicio 5 (Extraído del Capítulo I)**

*(1'5 puntos) Queremos dividir un ángulo de $22^\circ$ en nueve partes iguales. ¿Cuánto medirá cada nuevo ángulo? Expresa la solución en grados, minutos y segundos.*

Comenzamos realizando la división de manera normal:

$$\begin{array}{r|l} 22^\circ & 9 \\ \cline{2-2} 4^\circ & 2^\circ \end{array}$$

Dado que nos sobran $4^\circ$ los pasamos a minutos para seguir dividiendo. Tenemos:

$$
\begin{array}{lclr}
22^\circ & & & \underline{|\ 9\ } \\
4^\circ & & & 2^\circ 26' \\
0^\circ & \rightarrow & 240' & \\
& & 60 & \\
& & 6' &
\end{array}
$$

Por último pasamos los minutos a segundos para terminar la división.

$$
\begin{array}{lclclr}
22^\circ & & & & & \underline{|\ 9\ } \\
4^\circ & & & & & 2^\circ 26' 40'' \\
0^\circ & \rightarrow & 240' & & & \\
& & 60 & & & \\
& & 6' & & & \\
& & 0' & \rightarrow & 360'' & \\
& & & & 00'' &
\end{array}
$$

Es decir, los nueve ángulos pequeños medirán $2^\circ 26' 40''$.

**Ejercicio 6 (Extraído del Capítulo K)**

*(1 punto) Halla el volumen, el área lateral y el área total de un cilindro cuya base mide* 5 *centímetros de radio y cuya altura es* 8 *centímetros.*

Para hallar el volumen y el área total vamos a necesitar previamente el área de la base. Dado que la base es un círculo, su área es $\pi \cdot r^2$. Tenemos por tanto que $\text{Área}_b = \pi \cdot 5^2 = 25\pi$ centímetros cuadrados.

Calculamos el volumen. Recordamos que $\text{Vol}=\text{Área}_b \cdot h = 25\pi \cdot 8 = 200\pi$ centímetros cúbicos.

Para calcular el área lateral del cilindro, necesitamos la longitud de la base. Dado que es una circunferencia, tenemos que $\text{Long}_b = 2\cdot\pi\cdot r = 2\cdot\pi\cdot 5 = 10\pi$ centímetros.

El área lateral es $\text{Área}_l = \text{Long}_b \cdot h = 10\pi \cdot 8 = 80\pi$ centímetros cuadrados.

Por último, el área total es el área lateral más dos veces el área de la base. Es decir, $\text{Área}_t = 80\pi + 2 \cdot 25\pi = 130\pi$ centímetros cuadrados.

**Ejercicio 7 (Extraído del Capítulo L)**

*(1 punto) Los lados de un rectángulo miden* 4 *centímetros de largo y* $2'5$ *centímetros de ancho. Tenemos otro rectángulo semejante. Su largo es de* 32 *centímetros. ¿Cuánto mide el ancho del rectángulo?*

Dado que los rectángulos son semejantes, el cociente entre largo y ancho es igual en ambos rectángulos. Por tanto tenemos que $\dfrac{4}{2'5} = \dfrac{32}{x}$, siendo $x$ el ancho del segundo rectángulo.
Resolvemos la regla de tres y obtenemos $x = \dfrac{32 \cdot 2'5}{4} = 20$.
Es decir, el ancho del segundo rectángulo es de 20 centímetros.