Ejercicio 1 (Extraído del Capítulo A)

Opera:

a) *(1 punto)* $\sqrt{50}+\sqrt{32}-\sqrt{200}$.

b) *(1 punto)* $\sqrt{2}+3\sqrt{3}+5\sqrt{2}+8\sqrt{3}-5\sqrt{2}-12\sqrt{3}$.

a) $\sqrt{50}+\sqrt{32}-\sqrt{200}$.

En primer lugar factorizamos $50=2\cdot 5^2$, $32=2^5$ y $200=2^3\cdot 5^2$. Es decir, tenemos $\sqrt{50}+\sqrt{32}-\sqrt{200}=\sqrt{2\cdot 5^2}+\sqrt{2^5}-\sqrt{2^3\cdot 5^2}$. Extrayendo factores (los que tienen exponente 2, que sale elevado a uno, o 4, que sale con exponente dos) tenemos $5\sqrt{2}+4\sqrt{2}-10\sqrt{2}$. Sumando todos los términos, dado que son semejantes, obtenemos $-\sqrt{2}$.

b) $\sqrt{2}+3\sqrt{3}+5\sqrt{2}+8\sqrt{3}-5\sqrt{2}-12\sqrt{3}$.

Sumamos los términos que sean semejantes. Es decir, por un lado los que tienen $\sqrt{2}$ y por otro los que tienen $\sqrt{3}$. Es decir, tenemos $\sqrt{2}-\sqrt{3}$.

Ejercicio 2 (Extraído del Capítulo C)

Dados los polinomios $P(x)=4x^5-5x^3-4x-10$, $Q(x)=3x^4+2x^3-x^2+5x+2$ *y* $R(x)=2x^3+x^2-x-2$, *calcula:*

a) *(0.5 puntos)* $2P(x)-Q(x)$.

b) *(0.75 puntos)* $P(x)\cdot R(x)$.

c) *(0.75 puntos)* $P(x):R(x)$.

a) $2P(x)-Q(x)$.

En primer lugar sustituimos cada polinomio por su expresión. Obtenemos:

$2P(x)-Q(x)=2(4x^5-5x^3-4x-10)-(3x^4+2x^3-x^2+5x+2)$.

Eliminamos los paréntesis. Para ello, debemos multiplicar cada coeficiente del primer paréntesis por 2 y cada coeficiente del segundo paréntesis por -1. Obtenemos:

$2P(x) - Q(x) = 8x^5 - 10x^3 - 8x - 20 - 3x^4 - 2x^3 + x^2 - 5x - 2.$

Por último sumamos los monomios semejantes, sumando sus coeficientes:

$2P(x) - Q(x) = 8x^5 - 3x^4 - 12x^3 + x^2 - 13x - 22.$

b) $P(x) \cdot R(x)$.

En primer lugar sustituimos cada polinomio por su expresión. Obtenemos:

$P(x) \cdot R(x) = (4x^5 - 5x^3 - 4x - 10) \cdot (2x^3 + x^2 - x - 2).$

Para multiplicar ambos polinomios multiplicamos cada monomio del primero por cada monomio del segundo. Obtenemos:

$P(x) \cdot R(x) = 8x^8 + 4x^7 - 4x^6 - 8x^5 - 10x^6 - 5x^5 + 5x^4 + 10x^3 - 8x^4 - 4x^3 + 4x^2 + 8x - 20x^3 - 10x^2 + 10x + 20.$

Sumando monomios semejantes tenemos:

$P(x) \cdot R(x) = 8x^8 + 4x^7 - 14x^6 - 13x^5 - 3x^4 - 14x^3 - 6x^2 + 18x + 20.$

c) $P(x) : R(x)$.

$$
\begin{array}{rrrrrr|l}
4x^5 & & -5x^3 & & -4x & -10 & 2x^3 + x^2 - x - 2 \\ \cline{7-7}
-4x^5 & -2x^4 & +2x^3 & +4x^2 & & & 2x^2 - x - 1 \\ \cline{1-6}
 & -2x^4 & -3x^3 & +4x^2 & -4x & -10 & \\
 & 2x^4 & +x^3 & -x^2 & -2x & & \\ \cline{1-6}
 & & -2x^3 & +3x^2 & -6x & -10 & \\
 & & +2x^3 & +x^2 & -x & -2 & \\ \cline{1-6}
 & & & +4x^2 & -7x & -12 &
\end{array}
$$

Ejercicio 3 (Extraído del Capítulo E)

(2 puntos) En una granja, 16 *conejos consumen* 100 *kilogramos de pienso en* 12 *días. ¿Cuántos días pueden comer* 6 *conejos con* 200 *kilogramos de pienso?*

Observamos que tenemos tres magnitudes: número de conejos, kilogramos de pienso y tiempo. Para representarlas usaremos *conejos*, *pienso* y *días*. Representamos los datos en una tabla. Dado que nos preguntan por el número de días, será la primera magnitud que escribiremos. Tenemos:

Días	Conejos	Pienso
12	16	100
x	6	200

Ahora debemos estudiar si la relación entre las magnitudes es directa o inversamente proporcional. Si mantenemos fija la cantidad de comida y queremos que nos dure más días, podremos alimentar menos animales. Por tanto las magnitudes días y conejos son inversamente proporcionales. Por otro lado, si dejamos fijo el número de conejos, para alimentarlos durante más días debemos tener más comida. En consecuencia las magnitudes comida y días son directamente proporcionales.

Para resolver, escribimos los términos de la primera columna en forma de fracción y un igual. Los elementos de la segunda columna los ponemos invertidos y los de la última, los ponemos como están.

Obtenemos $\frac{12}{x} = \frac{6}{16} \cdot \frac{100}{200}$. Multiplicando tenemos $\frac{12}{x} = \frac{600}{3200}$.

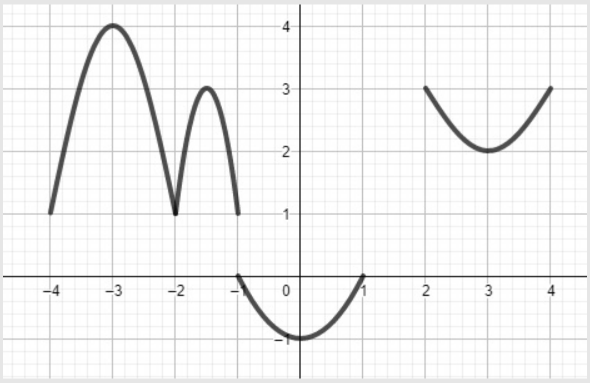
Simplificando entre 200 tenemos $\frac{12}{x} = \frac{3}{16}$.

Multiplicando en cruz tenemos $3x = 12 \cdot 16 = 192$. Pasamos el 3 dividiendo y obtenemos $x = 64$.

Es decir, se podrán alimentar durante 64 días.

Ejercicio 4 (Extraído del Capítulo G)

(2 puntos) Estudia el dominio, el recorrido, los intervalos de crecimiento, los máximos, los mínimos, la continuidad y puntos de corte con los ejes de la siguiente función.



El dominio de una función es el conjunto de valores de x para los que hay gráfica. Para estudiar el dominio, lo más sencillo es aplastar la función sobre el eje X. Tenemos que el primer trozo de función va desde $x = -4$ hasta $x = -1$. El segundo trozo va desde $x = -1$ hasta $x = 1$. El tercer trozo de función va desde $x = 2$ hasta $x = 4$. Es decir, el dominio de la función es $[-4, 1] \cup [2, 4]$.

De manera análoga, el recorrido es el conjunto de valores de y para los que hay función. Por tanto, la manera más cómoda de estudiar el recorrido es aplastar la función sobre el eje Y. El primer trozo de función va desde $y = 1$ hasta $y = 4$. El segundo trozo va desde $y = -1$ hasta $y = 0$. El tercer trozo de función va desde $y = 2$ hasta $y = 3$. En consecuencia el recorrido es $[-1, 0] \cup [1, 4]$.

Ahora estudiamos los intervalos de crecimiento y decrecimiento. La función crece cuando sube según va hacia la derecha y decrece cuando baja. Los intervalos de crecimiento y decrecimiento se consideran abiertos; es decir, con paréntesis.

Tenemos que la función crece si $x \in (-4, -3) \cup (-2, -1'5) \cup (0, 1) \cup (3, 4)$.

Tenemos que la función crece si $x \in (-3,-2) \cup (-1'5,-1) \cup (-1,0) \cup (2,3)$.

Tenemos un máximo relativo de la función si la función crece a la izquierda del punto y decrece a la derecha. Es decir, tenemos máximos relativos en $(-3,4)$ y $(-1'5,3)$. El máximo absoluto de la función es el punto de la función que está más arriba. En este caso, el máximo absoluto es $(-3,4)$.

De manera análoga tenemos un mínimo relativo de la función si la función decrece a la izquierda del punto y crece a la derecha. Es decir, tenemos mínimos relativos en $(0,-1)$ y $(3,2)$. El mínimo absoluto de la función es el punto de la función que está más abajo. En este caso, el mínimo absoluto es $(0,-1)$.

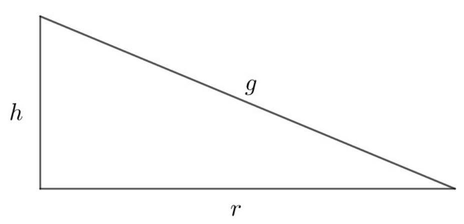
La función es discontinua en los que hay un salto en la gráfica. Por tanto, tenemos una discontinuidad en $x=-1$.

Por último, estudiamos los puntos de corte. Con el eje Y, observamos que la gráfica corta en $(0,-1)$. Con el eje X observamos que los puntos de corte son $(-1,0)$ y $(1,0)$.

Ejercicio 5 (Extraído del Capítulo I)

(2 puntos) La altura de un cono mide 5 *metros y su generatriz mide* 13 *metros. Calcula su volumen y su área total.*

Consideramos el triángulo cuyos vértices son el centro de la base, el vértice del cono y un punto cualquiera de la circunferencia de la base. Este triángulo (en la figura lateral) es rectángulo.



Aplicamos el Teorema de Pitágoras tenemos que $g^2 = r^2 + h^2$. Sustituyendo tenemos $13^2 = r^2 + 5^2$. Operando debemos resolver la ecuación $169 = r^2 + 25$, o equivalentemente, $144 = r^2$. Tomando raíces cuadrados obtenemos que el radio de la base mide $r = 12$ metros.

La fórmula para hallar el volumen de un cono es $V = \dfrac{\pi \cdot r^2 \cdot h}{3}$, siendo r el radio de la base y h la altura del cono. Por tanto $V = \dfrac{\pi \cdot 12^2 \cdot 5}{3} = 240\pi \approx 753'98\text{m}^3$. Observamos que tenemos la fórmula equivalente $V = \dfrac{A_b \cdot h}{3}$, siendo A_b el área de la base del cono.

Ahora para hallar el área total, empleamos la fórmula $A_t = A_b + A_{lat}$. La base es un círculo; por tanto, $A_b = \pi \cdot r^2$. Por otro lado $A_{lat} = \pi \cdot r \cdot g$. Sustituyendo tenemos que $A_b = \pi \cdot 12^2 = 144\pi$ y que $A_{lat} = \pi \cdot 12 \cdot 13 = 156\pi$.

En consecuencia tenemos $A_t = 144\pi + 156\pi = 300\pi \approx 942'48\text{cm}^2$.

Ejercicio 6 (Extraído del Capítulo K)

En la siguiente tabla encontramos los goles marcados en cada partido de una temporada.

3	2	5	2	4	0	1	0	3	2
1	2	5	4	5	2	1	2	3	1
0	0	0	2	4	1	2	1	3	1
1	2	4	0	1	4	0	0	0	1
2	3	1	1	0	5	0	1	1	2

a) *(0.5 puntos) Realiza una tabla de frecuencias.*

b) *(0.5 puntos) Calcula la media.*

c) *(0.5 puntos) Calcula los cuartiles.*

a) Realiza una tabla de frecuencias.

Observamos que la variable es cuantitativa (discreta); por tanto, tiene sentido calcular frecuencias acumuladas. En primer lugar observamos que los datos de la tabla varían entre 0 y 5. Contando el número de veces que se repite cada dato obtenemos la siguiente tabla.

x_i	f_i	h_i	F_i	H_i	$x_i \cdot f_i$	$x_i^2 \cdot f_i$
0	11	$\frac{11}{50} = 0'22$	11	$0'22$	0	0
1	14	$\frac{14}{50} = 0'28$	25	$0'50$	14	14
2	11	$\frac{11}{50} = 0'22$	36	$0'72$	22	44
3	5	$\frac{5}{50} = 0'10$	41	$0'82$	15	45
4	5	$\frac{5}{50} = 0'10$	46	$0'92$	20	80
5	4	$\frac{4}{50} = 0'08$	50	1	20	100
					$\sum x_i \cdot f_i = 91$	$\sum x_i^2 \cdot f_i = 283$

b) Calcula la media.

Para calcular la media empleamos la fórmula $\overline{x} = \frac{\sum x_i \cdot f_i}{N} = \frac{91}{50} = 1'82$.

c) Calcula los cuartiles.

Para calcular el valor de cualquier percentil (y en particular cualquier cuartil) debemos transformar el porcentaje correspondiente a decimal y buscar el valor correspondiente en la columna H_i.

El primer cuartil coincide con el percentil 25. El decimal asociado al 25 % es $0'25$. Dicho decimal no aparece en la columna H_i. Por tanto buscamos el valor de dicha columna que es inmediatamente superior a $0'25$. En este caso dicho valor es el $0'5$. El valor correspondiente a $0'5$ es 1. Por tanto el primer cuartil es $Q_1 = 1$.

El segundo cuartil (o mediana) coincide con el percentil 50. Buscamos el $0'5$ (decimal asociado al 50 %) en la columna H_i. Dado que está, el percentil correspondiente es la media aritmética entre el valor correspondiente al $0'5$ y el inmediatamente superior. Es decir, el segundo cuartil es $Q_2 = \frac{1+2}{2} = 1'5$.

Por último, el tercer cuartil corresponde al percentil 75. El decimal asociado al 75 % es $0'75$. Dado que no está en la columna H_i tomamos el valor inmediatamente superior, en este caso $0'82$. El valor correspondiente es 3. En consecuencia $Q_3 = 3$.