Ejercicio 1 (Extraído del Capítulo A)

Suponiendo que $\log 2 = 0'32$ *y* $\log 3 = 0'49$ *calcula razonadamente:*

a) *(1 punto)* $\log \sqrt{720}$.

b) *(1 punto)* $\log \frac{243}{2}$.

c) *(1 punto)* $\log_3 4$.

a) $\log \sqrt{720}$.

Factorizamos 720 en función de los números 2 y 3, que son los valores que tenemos en el enunciado, y 10 que es la base del logaritmo que tenemos. En primer lugar tenemos $720 = 72 \cdot 10 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 10$. Por tanto, tenemos la igualdad siguiente $\log \sqrt{720} = \log \sqrt{2^3 \cdot 3^2 \cdot 10}$. Además, bajamos el exponente de la raíz delante del logaritmo, teniendo $\log \sqrt{720} = \frac{1}{2}\left(\log \sqrt{2^3 \cdot 3^2 \cdot 10}\right)$. Aplicando las propiedades de los logaritmos transformamos el producto en suma. Es decir, $\log 720 = \frac{1}{2}\left(\log 2^3 + \log 3^2 + \log 10\right)$. Bajamos los exponentes delante de los logaritmos y obtenemos $\log 720 = \frac{1}{2}(3 \cdot \log 2 + 2 \cdot \log 3 + \log 10)$. Sustituyendo los valores del enunciado y teniendo en cuenta que $\log 10 = 1$ obtenemos $\log 720 = \frac{1}{2}(3 \cdot 0'32 + 2 \cdot 0'49 + 1) = \frac{1}{2} \cdot 2'94 = 1'47$.

b) $\log \frac{243}{2}$.

En primer lugar, factorizamos $243 = 3^5$. Por lo tanto, tenemos $\log \frac{243}{2} = \log \frac{3^5}{2}$. Aplicando las propiedades de los logaritmos, el logaritmo del cociente equivale a la resta de los logaritmos, obtenemos $\log \frac{243}{2} = \log 3^5 - \log 2$. Bajamos el exponente delante del logaritmo obteniendo $\log \frac{243}{2} = 5 \log 3 - \log 2$. Sustituyendo tenemos $\log \frac{243}{2} = 5 \cdot 0'49 - 0'32 = 2'13$.

c) $\log_3 4$.

En primer lugar, utilizamos la fórmula de cambio de base. Obtenemos la igualdad

$\log_3 4 = \dfrac{\log 4}{\log 3}$. Factorizando el $4 = 2^2$ obtenemos $\log_3 4 = \dfrac{\log 2^2}{\log 3}$. Bajamos el exponente delante del logaritmo obteniendo $\log_3 4 = \dfrac{2\log 2}{\log 3}$. Sustituyendo los valores y calculando tenemos $\log_3 4 = \dfrac{2 \cdot 0'32}{0'49} = 1'306$.

Ejercicio 2 (Extraído del Capítulo C)

(2 puntos) Opera:

$$\frac{x-2}{x^3+2x^2-x-2} + \frac{x+2}{x^3-2x^2-x+2}.$$

Factorizamos cada polinomio del denominador, mediante Ruffini. Obtenemos:

$$\begin{array}{r|rrrr}
 & 1 & 2 & -1 & -2 \\
1 & & 1 & 3 & 2 \\
\hline
 & 1 & 3 & 2 & \boxed{0} \\
-1 & & -1 & -2 & \\
\hline
 & 1 & 2 & \boxed{0} & \\
-2 & & -2 & & \\
\hline
 & 1 & \boxed{0} & &
\end{array}$$

Es decir, tenemos que $x^3+2x^2-x-2 = (x+1)(x-1)(x+2)$. Por otro lado tenemos:

$$\begin{array}{r|rrrr}
 & 1 & -2 & -1 & 2 \\
1 & & 1 & -1 & -2 \\
\hline
 & 1 & -1 & -2 & \boxed{0} \\
-1 & & -1 & 2 & \\
\hline
 & 1 & -2 & \boxed{0} & \\
2 & & 2 & & \\
\hline
 & 1 & \boxed{0} & &
\end{array}$$

Es decir, tenemos $x^3 - 2x^2 - x + 2 = (x + 1)(x - 1)(x - 2)$.

En consecuencia tenemos:

$$\frac{x-2}{x^3+2x^2-x-2}+\frac{x+2}{x^3-2x^2-x+2}=\frac{x-2}{(x+1)(x-1)(x+2)}+\frac{x+2}{(x+1)(x-1)(x-2)}.$$

Por tanto, el denominador común es $(x+1)(x-1)(x+2)(x-2)$. Tenemos entonces que la operación es:

$$\frac{(x-2)(x-2)}{(x+1)(x-1)(x+2)(x-2)}+\frac{(x+2)(x+2)}{(x+1)(x-1)(x+2)(x-2)}.$$

Operando los numeradores tenemos:

$$\frac{x^2-4x+4}{(x+1)(x-1)(x+2)(x-2)}+\frac{x^2+4x+4}{(x+1)(x-1)(x+2)(x-2)}.$$

Sumando los numeradores tenemos:

$$\frac{x-2}{x^3+2x^2-x-2}+\frac{x+2}{x^3-2x^2-x+2}=\frac{2x^2+8}{(x+1)(x-1)(x+2)(x-2)}.$$

Dado que el numerador no tiene raíces reales, la fracción no es simplificable. Por tanto el resultado es la anterior fracción en la que vamos a multiplicar los factores del denominador:

$$\frac{x-2}{x^3+2x^2-x-2}+\frac{x+2}{x^3-2x^2-x+2}=\frac{2x^2+8}{x^4-5x^2+4}.$$

Ejercicio 3 (Extraído del Capítulo D)

(2 puntos) Dos personas realizan una apuesta de 20 euros cada una. Si la primera persona gana, tendrá el triple del dinero que tendrá la segunda. Si gana la segunda, entonces ambas personas tendrán el mismo dinero. ¿Cuánto dinero tenía cada uno antes de realizar la apuesta?

Llamamos x=*dinero de la primera persona* e y=*dinero de la segunda persona*.

Si la primera persona gana, tendrá su dinero inicial más los 20 ganados $(x + 20)$; mientras que la segunda tendrá su cantidad inicial menos los 20 euros $(y - 20)$. Ahora la cantidad $x + 20$ es el triple que la cantidad $y - 20$. Por tanto, la primera ecuación es $x + 20 = 3(y - 20)$. Eliminando paréntesis tenemos $x - 3y = -80$.

Si la segunda persona gana, tendrá su dinero inicial más los 20 que gana. Es decir, tendría $y + 20$. Por otro lado, el primero tendría los iniciales menos los 20 que pierde. En consecuencia, tendría $x - 20$. Según el enunciado estas cantidades son iguales. Por lo tanto, la segunda ecuación es $x - 20 = y + 20$. Esta ecuación es equivalente a $-x + y = -40$.

Debemos resolver el sistema: $\left\{ \begin{array}{r} x - 3y = -80 \\ -x + y = -40 \end{array} \right\}$. Sumando las dos ecuaciones tenemos $-2y = -120$. Dividiendo entre -2, tenemos $y = 60$. Sustituyendo en la segunda ecuación del sistema tenemos $x = 100$.

Es decir, la primera persona tenía 100 euros y la segunda tenía 60 euros.

Ejercicio 4 (Extraído del capítulo G)

(2 puntos) Un explorador se encuentra en el punto $A(2, 1)$ *y enfoca su linterna en dirección* $\vec{v} = (3, 4)$*. ¿Cuál o cuáles de los siguientes puntos iluminará:* $B(20, 12)$*,* $C(18, 18)$*,* $D(47, 61)$ *ó* $E(55, 73)$*?*

Para resolver este problema observamos que los puntos que el explorador ilumina con su linterna son los que se encuentran sobre la recta r que pasa por A y tiene dirección $\vec{v}$.

La recta con vector $\vec{v}$ tiene como ecuación $r \equiv 4x - 3y + c = 0$, para cierto $c \in \mathbb{R}$.

Dado que el punto A pertenece a r debe satisfacer su ecuación. Por tanto debe ser cierto $4 \cdot 2 - 3 \cdot 1 + c = 0$. Operando tenemos $5 + c = 0$. Es decir, que $c = -5$. Por tanto, la ecuación de la recta es $4x - 3y - 5 = 0$.

Debemos ahora ver qué puntos satisfacen la ecuación de r.

Si $B \in r$, debería ser cierto $4 \cdot 20 - 3 \cdot 12 - 5 = 0$. Operando tenemos que el primer miembro vale 39. Por tanto, la linterna no ilumina el punto B.

Si $C \in r$, la igualdad $4 \cdot 18 - 3 \cdot 18 - 5 = 0$ debería ser cierta. El primer miembro vale 13. Por tanto, la linterna tampoco iluminará el punto C.

Si $D \in r$, la igualdad $4 \cdot 47 - 4 \cdot 61 - 5 = 0$ debe ser cierta. Operando, tenemos que la igualdad es cierta. Por tanto, el punto D si será iluminado por la linterna del explorador.

Si $E \in r$, la igualdad $4 \cdot 55 - 3 \cdot 73 - 5 = 0$ debería ser cierta. Pero el primer miembro vale -4. Por tanto, el punto E no será iluminado por la linterna.

Es decir, únicamente será iluminado el punto D.

Ejercicio 5 (Extraído del Capítulo J)

Calcula el dominio de las siguientes funciones:

a) *(1 punto)* $f(x) = \dfrac{7x^3 - 14x}{x^3 - x}$.

b) *(1 punto)* $g(x) = \sqrt{x^2 - 2x - 3}$.

c) *(1 punto)* $h(x) = \ln(2 - x)$.

a) $f(x) = \dfrac{7x^3 - 14x}{x^3 - x}$.

Dado que es una fracción, el denominador no puede anularse. Es decir, el dominio son todos los reales excepto los que anulan el denominador. Podemos escribir $\mathrm{Dom}(f) = \left\{x \in \mathbb{R} | x^3 - x \neq 0\right\}$

Resolvemos la ecuación $x^3 - x = 0$. En primer lugar extraemos factor común. Obtenemos $x(x^2 - 1) = 0$. Es decir, o bien $x = 0$, o bien $x^2 - 1 = 0$. Si $x^2 - 1 = 0$, pasamos el 1 a la derecha, obteniendo $x^2 = 1$. Tomando raíces cuadradas tenemos que $x = \pm 1$. En consecuencia, las soluciones de la ecuación son $x = 0$, $x = -1$ y $x = 1$.

Por tanto $\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{-1, 0, 1\}$.

b) $g(x) = \sqrt{x^2 - 2x - 3}$.

Dado que la función tiene una ecuación de índice par, su dominio coincide con los valores de x que hacen que la expresión del radicando tome valor no negativo.

Es decir, tenemos que $\mathrm{Dom}(g) = \left\{x \in x | x^2 - 2x - 3 \geq 0\right\}$.

Para resolver la inecuación $x^2 - 2x - 3 \geq 0$ factorizamos el polinomio del primer miembro. Para ello, resolvemos la ecuación asociada ($x^2 - 2x - 3 = 0$). Tenemos $x = \frac{2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3)}}{2 \cdot 1} = \frac{2 \pm 4}{2}$. Con el signo positivo tenemos el valor $x = 3$ y con el negativo, tenemos que $x = -1$. En consecuencia la factorización es $x^2 - 2x - 3 = (x + 1)(x - 3)$.

Construimos una tabla para resolver la inecuación:

	$x \in (-\infty, -1)$	$x \in (-1, 3)$	$x \in (3, \infty)$
$x + 1$	$-$	$+$	$+$
$x - 3$	$-$	$-$	$+$
$x^2 - 2x - 3$	$+$	$-$	$+$

Tomamos los intervalos con un + en la última fila. Dado que la desigualdad contiene la igualdad, las soluciones de la ecuación también son soluciones válidas para la inecuación.

Es decir, tenemos $\mathrm{Dom}(g) = (-\infty, -1] \cup [3, \infty)$.

c) $h(x) = \ln(2 - x)$.

Dado que tenemos un logaritmo neperiano, la expresión de dentro debe tomar valores positivos.

Es decir, tenemos que $\mathrm{Dom}(h) = \{x \in \mathbb{R} | 2 - x > 0\}$.

Debemos, por tanto, resolver la inecuación $2 - x > 0$. Al ser una inecuación de grado 1, resolvemos como una ecuación. Pasamos la x al segundo miembro sumando. Obtenemos $2 > x$. Es decir, los números válidos son los que son más pequeños que 2.

En consecuencia, tenemos $\mathrm{Dom}(h) = (-\infty, 2)$.

Ejercicio 6 (Extraído del Capítulo L)

(1 punto) Deriva las siguientes funciones:

a) $f(x) = (2x+1)e^x$.

b) $g(x) = \ln(4x+5)$.

a) $f(x) = (2x+1)e^x$.

Es un producto, que se deriva como la suma de la derivada del polinomio por la exponencial, más el polinomio por la derivada de la exponencial. Tenemos:

$f'(x) = 2e^x + (2x+1)e^x = (2x+3)e^x$.

b) $g(x) = \ln(4x+5)$.

Al tratarse de un logaritmo, su derivada es una fracción. En el denominador encontramos el polinomio, en el numerado, la derivada del polinomio. Obtenemos:

$g'(x) = \dfrac{4}{4x+5}$.

Ejercicio 7 (Extraído del Capítulo M)

(1 punto) Consideramos dos sucesos independientes de un experimento que cumplen $P(A) = 0'8$ *y* $P(B) = 0'25$. *Calcula* $P(A \cup B)$ *y* $P\left(A \cap \overline{B}\right)$.

En primer lugar observamos que, al ser A y B independientes, la probabilidad de su intersección coincide con el producto de las probabilidades.

Es decir, $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) = 0'8 \cdot 0'25 = 0'2$.

Ahora aplicamos las fórmulas necesarias para resolver el ejercicio. Tenemos:

- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0'8 + 0'25 - 0'2 = 0'85$.
- $P\left(A \cap \overline{B}\right) = P(A) - P(A \cap B) = 0'8 - 0'2 = 0'6$.