Ejercicio 1 (Extraído del capítulo A)

(2 puntos) Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} b & 1 & 4 \\ 5 & 1 & 7 \\ 2 & 0 & b \end{pmatrix}$ *dependiente del parámetro b, responde las siguientes preguntas:*

a) (1 punto) ¿Para qué valores de b admite inversa?

b) (1 punto) Halla A^{-1} *si* $b = 0$.

a) (1 punto) ¿Para qué valores de b admite inversa?

Una matriz cuadrada admite inversa si y solo si su determinante es cero. Por tanto, para resolver este apartado vamos a calcular el determinante de A:

$|A| = b^2 + 14 + 0 - 8 - 5b - 0 = b^2 - 5b + 6$.

Resolvemos la ecuación $|A| = 0$. Es decir, $b^2 - 5b + 6 = 0$.

Aplicando la fórmula para resolver la ecuación de segundo grado tenemos que $b = \dfrac{5 \pm \sqrt{(-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6}}{2 \cdot 1} = \dfrac{5 \pm 1}{2}$. Con el signo positivo tenemos $b = 3$. Con el negativo tenemos $b = 2$.

En consecuencia la matriz A admite inversa si y solo si $b \neq 2$ y $b \neq 3$.

b) (1 punto) Halla A^{-1} si $b = 0$.

Para $b = 0$ tenemos que $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 5 & 1 & 7 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Sustituyendo $b = 0$ en la expresión del determinante del anterior apartado tenemos que $|A| = 6$.

Calculamos ahora la matriz adjunta de A:

$$A^{\text{adj}} = \begin{pmatrix} 0 & 14 & -2 \\ 0 & -8 & 2 \\ 3 & 20 & -5 \end{pmatrix}.$$

Ahora procedemos al cálculo de la traspuesta de la adjunta:

$$\left(A^{\text{adj}}\right)^t = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 14 & -8 & 20 \\ -2 & 2 & -5 \end{pmatrix}.$$

Por último, dividiendo entre el determinante obtenemos la matriz inversa:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\left(A^{\text{adj}}\right)^t = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 14 & -8 & 20 \\ -2 & 2 & -5 \end{pmatrix}.$$

Ejercicio 2 (Extraído del capítulo B)

(2 puntos) Dado el sistema $\left\{\begin{array}{c} x + y = 1 \\ x + a^2y = a \end{array}\right\}$ *dependiente del parámetro a resuelve las siguientes cuestiones:*

a) (1,5 puntos) Discute el sistema en función del parámetro a.

b) (0,5 puntos) Resuélvelo en el caso de que sea compatible determinado.

a) (1,5 puntos) Discute el sistema en función del parámetro a.

En primer lugar escribimos las matrices de coeficientes: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & a^2 \end{pmatrix}$ y $A^* = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a^2 & a \end{array}\right)$.

Comenzamos a estudiar el rango de la matriz A por ser la matriz cuadrada. Tenemos que $|A| = a^2 - 1$.

Resolvemos la ecuación $|A| = 0$. Es decir, $a^2 - 1 = 0$. Al ser una ecuación incompleta sin término lineal despejamos la a. Para ello, pasamos el 1 a la derecha sumando, obteniendo $a^2 = 1$. Tomando raíces cuadradas tenemos $a = \pm 1$.

Por tanto, debemos considerar tres casos:

- Si $a \neq \pm 1$, entonces el rango de A es máximo; es decir $\mathrm{rg(A)} = 2$. Por otro lado, $\mathrm{rg}\left(\mathrm{A}^*\right) \geq \mathrm{rg(A)}$ al ser A una submatriz de A^*. Pero al tener A^* dos filas, su rango no puede ser mayor que este número. Por tanto, tenemos que $\mathrm{rg}\left(\mathrm{A}^*\right) = 2$. Al ser $\mathrm{rg(A)} = \mathrm{rg}\left(\mathrm{A}^*\right) = \mathrm{n^o}$ de incógnitas, tenemos que el sistema es compatible determinado (por el **teorema de Rouché-Frobenius**).

- Si $a = 1$ tenemos el sistema $\left\{\begin{array}{l} x + y = 1 \\ x + y = 1 \end{array}\right\}$. Es decir, ambas ecuaciones son iguales y, en consecuencia, tenemos una ecuación con dos incógnitas. Por tanto el sistema es compatible indeterminado. Si quisieramos realizar el estudio de rangos de las matrices, ambas tendrían rango 1.

- Si $a = -1$, tenemos las matrices $A^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ y $A^* = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{array}\right)$. En la matriz A, las dos filas son iguales, por tanto podemos eliminar una de ellas. Así $\mathrm{rg(A)} = 1$. Por otro lado, para estudiar el rango de A^* tomamos la segunda y tercera columna y calculamos el determinante: $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2$. Por tanto, tenemos que $\mathrm{rg}\left(\mathrm{A}^*\right) = 2$. Al ser $\mathrm{rg(A)} \neq \mathrm{rg}\left(\mathrm{A}^*\right)$ y, aplicando el **teorema de Rouché-Frobenius**, el sistema es incompatible.

b) (0,5 puntos) Resuélvelo en el caso de que sea compatible determinado.

Por el apartado *a*) el sistema es compatible determinado si $a \neq \pm 1$. Por tanto lo resolvemos para este caso con la **regla de Cramer**.

- $x = \dfrac{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ a & a^2 \end{vmatrix}}{(a-1)(a+1)} = \dfrac{a^2 - a}{(a-1)(a+1)} = \dfrac{a(a-1)}{(a-1)(a+1)} = \dfrac{a}{(a+1)}$.

- $y = \dfrac{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & a \end{vmatrix}}{(a-1)(a+1)} = \dfrac{a-1}{(a-1)(a+1)} = \dfrac{1}{(a+1)}.$

Así, la solución es $(x, y) = \left(\dfrac{a}{a+1}, \dfrac{1}{a+1}\right)$.

Ejercicio 3 (Extraído del capítulo C)

(2,5 puntos) Calcula el valor del determinante $\begin{vmatrix} a+1 & a & a & a \\ a & a+1 & a & a \\ a & a & a+1 & a \\ a & a & a & a+1 \end{vmatrix}$.

En primer lugar, observamos que la suma de todos los elementos de una fila es la misma en las cuatro filas. Por tanto, vamos a realizar en la primera columna la combinación lineal correspondiente a sumar todas las columnas (no afecta al valor del determinante):

$$\begin{vmatrix} a+1 & a & a & a \\ a & a+1 & a & a \\ a & a & a+1 & a \\ a & a & a & a+1 \end{vmatrix} \underset{=}{C_1 \to C_1 + C_2 + C_3 + C_4} \begin{vmatrix} 4a+1 & a & a & a \\ 4a+1 & a+1 & a & a \\ 4a+1 & a & a+1 & a \\ 4a+1 & a & a & a+1 \end{vmatrix}.$$

Ahora observamos que todos los elementos de la primera columna son iguales. Por tanto, podemos extraer $4a + 1$ de la primera columna:

$$\begin{vmatrix} 4a+1 & a & a & a \\ 4a+1 & a+1 & a & a \\ 4a+1 & a & a+1 & a \\ 4a+1 & a & a & a+1 \end{vmatrix} = (4a+1) \begin{vmatrix} 1 & a & a & a \\ 1 & a+1 & a & a \\ 1 & a & a+1 & a \\ 1 & a & a & a+1 \end{vmatrix}.$$

Ahora, para calcular el determinante, hacemos ceros debajo del primer 1. Para ello, restamos la primera fila a cada una de las otras tres filas (tampoco modifica el valor del determinante). Obtenemos:

$$(4a+1)\begin{vmatrix} 1 & a & a & a \\ 1 & a+1 & a & a \\ 1 & a & a+1 & a \\ 1 & a & a & a+1 \end{vmatrix} \overset{\substack{F_2\to F_2-F_1 \\ F_3\to F_3-F_1 \\ F_4\to F_4-F_1}}{=} (4a+1)\begin{vmatrix} 1 & a & a & a \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Dado que la última matriz que nos queda es triangular, su determinante se calcula multiplicando los elementos de su diagonal. Es decir, tenemos que:

$$(4a+1)\begin{vmatrix} 1 & a & a & a \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 4a+1.$$

Ejercicio 4 (Extraído del capítulo D)

(2 puntos) Resuelve los siguientes límites:

a) *(1 punto)* $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2-5x+6}{x^2-4}$.

b) *(1 punto)* $\lim\limits_{x\to\infty} \left(1-\dfrac{3}{x^2}\right)^{2x+5}$

a) (1 punto) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2-5x+6}{x^2-4}$.

En primer lugar sustituimos cada x por 2 para ver qué resultado obtenemos: $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2-5x+6}{x^2-4} = \left[\dfrac{0}{0}\right]$.

Para resolver esta indeterminación tenemos dos opciones: aplicar la **regla de L'Hôpital** o factorizar ambos polinomios y simplificar los factores comunes.

Aplicamos la **regla de L'Hôpital**: $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2-5x+6}{x^2-4} = \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{2x-5}{2x} = \dfrac{-1}{4} = -\dfrac{1}{4}$.

De otra manera resolvemos factorizando numerador y denominador.

Para factorizar el numerador, resolvemos la ecuación de segundo grado asociada: $x^2-5x+6=0$. Aplicando la fórmula de la ecuación de segundo grado tenemos

$x = \dfrac{5 \pm \sqrt{(-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6}}{2 \cdot 1} = \dfrac{5 \pm 1}{2}$. Con el signo positivo tenemos $x = 3$. Con el negativo $x = 2$. Por tanto, la factorización es $x^2 - 5x + 6 = (x-2)(x-3)$.

El denominador es una identidad notable. Factorizando tenemos la igualdad:

$x^2 - 4 = (x+2)(x-2)$.

Es decir tenemos $\displaystyle\lim_{x\to 2} \frac{x^2-5x+6}{x^2-4} = \lim_{x\to 2} \frac{(x-2)(x-3)}{(x-2)(x+2)}$.

Simplificando los factores que son iguales tenemos: $\displaystyle\lim_{x\to 2} \frac{x^2-5x+6}{x^2-4} = \lim_{x\to 2} \frac{(x-3)}{(x+2)}$.

Por último, sustituyendo tenemos: $\displaystyle\lim_{x\to 2} \frac{x^2-5x+6}{x^2-4} = \frac{2-3}{2+2} = -\frac{1}{4}$.

b) (1 punto) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \left(1 - \frac{3}{x^2}\right)^{2x+5}$

En primer lugar, sustituimos x por ∞. Observamos que la base vale 1 porque $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{3}{x^2} = 0$. El exponente vale ∞ porque $\displaystyle\lim_{x\to\infty} 2x+5 = \infty$. Así, tenemos que $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \left(1 - \frac{3}{x^2}\right)^{2x+5} = [1^\infty]$. Es decir, es un límite del tipo número e.

Procedemos a escribir la base como $1+\dfrac{1}{f(x)}$, siendo $f(x)$ una función a determinar. Para ello, ponemos el signo $-$ con el 3 y lo pasamos dividiendo. Es decir, tenemos que $1 - \dfrac{3}{x^2} = 1 + \dfrac{-3}{x^2} = 1 + \dfrac{1}{\frac{x^2}{-3}}$. Es decir: $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \left(1 - \frac{3}{x^2}\right)^{2x+5} = \lim_{x\to\infty} \left(1 + \frac{1}{\frac{x^2}{-3}}\right)^{2x+5}$

Ahora ponemos la función $f(x) = \dfrac{x^2}{-3}$ en el exponente multiplicando y dividiendo para utilizar que $\displaystyle\lim_{f(x)\to\pm\infty} \left(1 + \frac{1}{f(x)}\right)^{f(x)} = e$. Tenemos, en consecuencia la igualdad

$$\lim_{x\to\infty} \left(1 + \frac{1}{\frac{x^2}{-3}}\right)^{2x+5} = \lim_{x\to\infty} \left(1 + \frac{1}{\frac{x^2}{-3}}\right)^{\frac{x^2}{-3} \cdot \frac{-3}{x^2} \cdot (2x+5)}$$

Tomando toda la base y la primera fracción del exponente, tenemos:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{x^2}{-3}}\right)^{\frac{x^2}{-3}\cdot\frac{-3}{x^2}\cdot(2x+5)} = e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-3}{x^2}(2x+5)}$$

El exponente es una función racional y, al ser mayor el grado del denominador, el límite vale 0.

Por tanto $e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-3}{x^2}(2x+5)} = e^0 = 1.$

Ejercicio 5 (Extraído del capítulo F)

(2 puntos) Calcula el límite $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+4x}-\sqrt{x^2-4x}\right)$.

Sustituyendo x por ∞ y operando obtenemos $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+4x}-\sqrt{x^2-4x}\right) = [\infty-\infty]$.

Al tratarse de una indeterminación del tipo $[\infty-\infty]$ en la que aparecen raíces, multiplicamos y dividimos por el conjugado:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+4x}-\sqrt{x^2-4x}\right) = \lim_{x\to\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+4x}-\sqrt{x^2-4x}\right)\left(\sqrt{x^2+4x}+\sqrt{x^2-4x}\right)}{\left(\sqrt{x^2+4x}+\sqrt{x^2-4x}\right)}.$$

Operando en el numerador tenemos:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+4x}-\sqrt{x^2-4x}\right)\left(\sqrt{x^2+4x}+\sqrt{x^2-4x}\right)}{\left(\sqrt{x^2+4x}+\sqrt{x^2-4x}\right)} = \lim_{x\to\infty}\frac{x^2+4x-(x^2-4x)}{\left(\sqrt{x^2+4x}+\sqrt{x^2-4x}\right)}$$

Es decir, $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2+4x-(x^2-4x)}{\left(\sqrt{x^2+4x}+\sqrt{x^2-4x}\right)} = \lim\limits_{x\to\infty}\frac{8x}{\left(\sqrt{x^2+4x}+\sqrt{x^2-4x}\right)}$.

Volviendo a sustituir tenemos $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{8x}{\left(\sqrt{x^2+4x}+\sqrt{x^2-4x}\right)} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right]$.

Para deshacer la indeterminación $\frac{\infty}{\infty}$ dividimos por la x de mayor exponente, en este caso x. Debemos tener en cuenta que dentro de la raíz será x^2. Obtenemos:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{8x}{\left(\sqrt{x^2+4x}+\sqrt{x^2-4x}\right)} = \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{8x}{x}}{\left(\sqrt{\frac{x^2}{x^2}+\frac{4x}{x^2}}+\sqrt{\frac{x^2}{x^2}-\frac{4x}{x^2}}\right)}.$$

Simplificando tenemos $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{8}{\left(\sqrt{1+\frac{4}{x}}+\sqrt{1-\frac{4}{x}}\right)}$.

Al ser $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1}{x} = 0$, tenemos que $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{8}{\left(\sqrt{1+\dfrac{4}{x}}+\sqrt{1-\dfrac{4}{x}}\right)} = \dfrac{8}{2} = 4$.

Ejercicio 6 (Extraído del capítulo G)

(2 puntos) Sean A y B dos sucesos tales que $P(A) = \dfrac{3}{4}$, $P(A/B) = \dfrac{3}{4}$ *y* $P(B/A) = \dfrac{1}{4}$.

a) (1 punto) Demuéstrese que A y B son sucesos independientes pero no incompatibles.

b) (1 punto) Calcúlese $P\left(\overline{A}/\overline{B}\right)$. *(Selectividad Madrid Junio 2016)*

a) (1 punto) Demuéstrese que A y B son sucesos independientes pero no incompatibles.

Este apartado se puede realizar de dos maneras. La primera es observar que, dado que $P(A) = P(A/B)$, los sucesos A y B son, automáticamente independientes.

Además, dos sucesos independientes son incompatibles únicamente si uno de ellos es el suceso imposible. Cosa que no es cierta, dado que $P(A) \neq 0$ y, por otro lado, $P(B) = P(B/A) \neq 0$.

De la segunda manera, podemos proceder así:

De la fórmula $P(B/A) = \dfrac{P(A\cap B)}{P(A)}$. Sustituyendo tenemos $\dfrac{1}{4} = \dfrac{P(A\cap B)}{3/4}$.

Despejando de esta ecuación tenemos $P(A\cap B) = \dfrac{3}{16}$.

Por otro lado, tenemos $P(A/B) = \dfrac{P(A\cap B)}{P(A)}$. Despejando $P(A)$ tenemos que $P(A) = \dfrac{P(A\cap B)}{P(A/B)} = \dfrac{3/16}{3/4} = \dfrac{1}{4}$.

Para estudiar si los dos sucesos son independientes debemos responder: ¿es cierto $P(A\cap B) = P(A)\cdot P(B)$? Sustituyendo los datos que tenemos, ¿es cierto $\dfrac{3}{16} = \dfrac{3}{4}\cdot\dfrac{1}{4}$? Sí. Por lo tanto, los sucesos A y B son independientes.

Dado que $P(A \cap B) \neq 0$, los sucesos no son incompatibles.

b) (1 punto) Calcúlese $P\left(\overline{A}/\overline{B}\right)$.

Dado que A y B son independientes, también lo son $\overline{A}$ y $\overline{B}$. Por lo tanto, tenemos que $P\left(\overline{A}/\overline{B}\right) = 1 - P(A) = \dfrac{1}{4}$.

Ejercicio 7 (Extraído del capítulo H)

(2 puntos) Una región agrícola se dedica a la producción de tomates. Durante este año se ha utilizado un nuevo abono y se quiere estimar la cantidad de tomate producido por hectárea. Se han muestreado 37 zonas y la producción media ha sido de 78 toneladas por hectárea. Se sabe que el número de toneladas por hectárea sigue una distribución normal con desviación típica 2.

a) (1,25 puntos) Calcular el intervalo de confianza al 95 %.

b) (0,75 puntos) ¿Cuál debe ser el tamaño muestral para que el intervalo tenga una longitud de 0, 5 con un nivel de confianza del 90 %?

(Selectividad Extremadura Junio 2018)

a) (1,25 puntos) Calcular el intervalo de confianza al 95 %.

El intervalo de confianza es $\left(\overline{x} - z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{x} - z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$.

El nivel de confianza es $1 - \alpha = 0,95$. Despejando el valor de α tenemos que $\alpha = 1 - 0,95 = 0,05$.

El dato que no tenemos es $z_{\frac{\alpha}{2}}$. En este caso es $z_{0,025}$. Buscamos en la tabla de la normal el valor que deja a la izquierda la probabilidad $1 - \dfrac{\alpha}{2} = 0,975$. Es decir, $z_{\frac{\alpha}{2}} = 1,96$.

Sustituyendo los datos en el intervalo tenemos $\left(78 - 1,96 \cdot \dfrac{2}{\sqrt{37}}, 78 - 1,96 \cdot \dfrac{2}{\sqrt{37}}\right)$.
Operando tenemos que el intervalo buscado es $(77,36; 78,64)$.

b) (0,75 puntos) ¿Cuál debe ser el tamaño muestral para que el intervalo tenga una longitud de $0,5$ con un nivel de confianza del 90 %?

La longitud del intervalo es el doble del error cometido. Por tanto, el error en este caso es $\frac{\alpha}{2} = \frac{0,5}{2} = 0,25$. La fórmula del error es $E = z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$.

En este caso el nivel de confianza es $1 - \alpha = 0,9$. Despejando tenemos $\alpha = 0,1$. En consecuencia tenemos $\frac{\alpha}{2} = 0,05$. Por tanto buscamos el valor que deja a la izquierda una probabilidad de $1 - \frac{\alpha}{2} = 0,95$. En este caso $z_{0,05} = 1,645$.

Sustituyendo los datos en la fórmula del error tenemos $0,25 = 1,645 \cdot \frac{2}{\sqrt{n}}$. Despejamos n; para ello, pasamos multiplicando $\sqrt{n}$ y el $0,25$ dividiendo. Tenemos $\sqrt{n} = \frac{1,645 \cdot 2}{0,25} = 13,16$. Elevando ambos miembros al cuadrado tenemos que $n = 173,1856$.

Es decir, se deben muestrear al menos 174 zonas.

Ejercicio 8 (Extraído del capítulo I)

(2 puntos) Dada la función $f(x) = \frac{2x^2 - x - 1}{1 - x^2}$*, responde las siguientes preguntas:*

a) (0,5 puntos) Estudia el dominio de $f(x)$.

b) (1,5 puntos) Estudia las asíntotas de $f(x)$.

a) (0,5 puntos) Estudia el dominio de $f(x)$.

Tenemos una función racional. Por tanto, el dominio es el conjunto de los reales, excepto los valores que anulan al denominador.

Resolvemos por tanto $1 - x^2 = 0$. Pasamos x^2 a la derecha sumando. Tenemos $1 = x^2$. Tomando raíces cuadradas obtenemos $x = \pm 1$, que son los valores que no pertenecen al dominio.

Por tanto, $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{\pm 1\}$.

b) (1,5 puntos) Estudia las asíntotas de $f(x)$.

Comenzamos con la asíntota horizontal. Al ser cociente de polinomios, la asíntota por la derecha coincide con la asíntota por la izquierda.

Calculamos $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x^2-x-1}{1-x^2}$.

Sustituyendo tenemos $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x^2-x-1}{1-x^2} = \left[\dfrac{\infty}{-\infty}\right]$.

Para resolver la indeterminación dividimos entre el monomio de mayor grado x^2.

Tenemos $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x^2-x-1}{1-x^2} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\frac{2x^2}{x^2}-\frac{x}{x^2}-\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x^2}-\frac{x^2}{x^2}} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2-\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x^2}-1}$.

Al ser $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1}{x^2} = 0$ obtenemos $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2-\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x^2}-1} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2-0-0}{0-1} = -2$.

Es decir, la recta $y=-2$ es asíntota horizontal de $f(x)$.

Al haber asíntota horizontal, no hay asíntota oblicua.

Para las asíntotas verticales, debemos estudiar los límites laterales en los valores que anulan el denominador; es decir, en $x=\pm 1$.

Comenzamos en $x=-1$. Calculamos $\lim\limits_{x\to -1} f(x) = \lim\limits_{x\to -1} \dfrac{2x^2-x-1}{1-x^2}$. Sustituyendo $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{2x^2-x-1}{1-x^2} = \left[\dfrac{2}{0}\right]$.

Calculamos los límites laterales:

- $\lim\limits_{x\to -1^+} \dfrac{2x^2-x-1}{1-x^2} = \dfrac{2}{0^+} = \infty$.
- $\lim\limits_{x\to -1^-} \dfrac{2x^2-x-1}{1-x^2} = \dfrac{2}{0^-} = -\infty$.

Al ser los límites laterales infinitos, tenemos una asíntota vertical en $x=-1$.

Estudiamos ahora $x=1$. Calculamos $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{2x^2-x-1}{1-x^2}$. Sustituyendo $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{2x^2-x-1}{1-x^2} = \left[\dfrac{0}{0}\right]$.

Resolvemos la indeterminación aplicando la **regla de L'Hôpital**.

Tenemos $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{2x^2-x-1}{1-x^2} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{4x-1}{-2x}$.

Sustituyendo tenemos $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{4x-1}{-2x} = \dfrac{3}{-2} = -\dfrac{3}{2}$.

Al ser un límite finito, no hay asíntota vertical en $x = 1$.

Ejercicio 9 (Extraído del capítulo J)

(2 puntos) En una gran ciudad se quiere estimar la proporción de fumadores. Se toma una muestra de 500 *personas, obteniendo que* 170 *de ellas fuman.*

a) (1 punto) Calcula un intervalo de confianza para la proporción de fumadores de la ciudad con un nivel de confianza del 97 %.

b) (1 punto) Suponiendo constante la proporción muestral, ¿cuál debe ser el tamaño mínimo de la muestra para que la amplitud del intervalo de confianza sea menor al 1 % *con una confianza del* 90 %*?*

a) (1 punto) Calcula un intervalo de confianza para la proporción de fumadores de la ciudad con un nivel de confianza del 97 %.

El intervalo de confianza para la proporción es:

$$\left(\hat{p} - z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{\hat{p}\cdot(1-\hat{p})}{n}}, \hat{p} + z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{\hat{p}\cdot(1-\hat{p})}{n}}\right).$$

La proporción muestral se calcula dividiendo las personas fumadoras entre el tamaño de la muestra. Tenemos $\hat{p} = \dfrac{170}{500} = 0,34$.

Por otro lado, para hallar $z_{\frac{\alpha}{2}}$, el nivel de confianza es $1-\alpha = 0,97$. Despejando tenemos que $\alpha = 1 - 0,97 = 0,03$ y, por tanto, $\dfrac{\alpha}{2} = 0,015$. Debemos encontrar el valor $z_{0,0015}$ que deja a la derecha una probabilidad de $0,015$ y a la derecha una probabilidad de $0,985$. Buscando esta probabilidad en la tabla de la normal $\mathrm{N}(0,1)$ tenemos que $z_{0,015} = 2,17$.

Sustituyendo los datos en la fórmula tenemos el intervalo:

$$\left(0,34 - 2,17 \cdot \sqrt{\frac{0,34\cdot(1-0,34)}{500}}, 0,34 + 2,17 \cdot \sqrt{\frac{0,34\cdot(1-0,34)}{500}}\right).$$

Operando tenemos el intervalo $(0,294; 0,386)$.

b) (1 punto) Suponiendo constante la proporción muestral, ¿cuál debe ser el tamaño mínimo de la muestra para que la amplitud del intervalo de confianza sea menor al 1 % con una confianza del 90 %?

La fórmula para el error cometido en el intervalo de confianza para la proporción es $E = z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{\hat{p} \cdot (1 - \hat{p})}{n}}$.

El valor de $\hat{p}$ es el mismo que en el anterior apartado; es decir, $\hat{p} = 0,34$.

La amplitud del intervalo es el doble que el error; es decir, tenemos:
$E = \frac{0,01}{2} = 0,005$.

Por último, el nivel de confianza es $1 - \alpha = 0,9$. Despejando tenemos que $\alpha = 1 - 0,9 = 0,1$ y $\frac{\alpha}{2} = 0,05$. Buscamos el valor $z_{0,05}$ que deja a la derecha una probabilidad de $0,05$ y a la izquierda $0,95$. Buscando en la tabla tenemos que $z_{0,05} = 1,645$.

Sustituyendo en la fórmula del error tenemos $0,005 = 1,645 \cdot \sqrt{\frac{0,34 \cdot (1 - 0,34)}{n}}$.
Pasando $\sqrt{n}$ a la izquierda multiplicando y el $0,005$ a la derecha dividiendo tenemos la igualdad:
$\sqrt{n} = \frac{1,645 \cdot \sqrt{0,34 \cdot (1 - 0,34)}}{0,005} = 155,85$.
Elevando al cuadrado tenemos que $n = 24289,28$.

Es decir, se debe tomar muestra de, al menos 24290 personas.